

普通高等教育“十三五”规划教材
电子信息科学与工程类专业规划教材

数字信号处理 (第2版)

王春民 主编

郑海峰 尹晶 蒲鑫 王强 副主编

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

内 容 简 介

本书根据高等学校人才培养目标编写,既适合理论教学,又加强实验环节,注重技术创新。全书共8章,主要内容包括:时域离散信号和系统、离散系统的变换域分析与系统结构、离散傅里叶变换(DFT)、快速傅里叶变换(FFT)、无限长单位脉冲响应(IIR)数字滤波器的设计、有限长单位脉冲响应(FIR)数字滤波器的设计、数字信号处理中的有限字长效应和MATLAB仿真实验。本书包含大量应用实例及MATLAB仿真,另外配套多媒体电子课件、仿真程序代码和习题参考答案。

本书可作为高等学校电子信息工程、电子信息科学与技术、通信工程、测控技术与仪器、自动化、电气工程及其自动化、轨道交通信号与控制等本科专业的教材,也可作为电类工程技术人员的参考资料。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

数字信号处理 / 王春民主编. —2版. —北京:电子工业出版社, 2018.9

ISBN 978-7-121-34923-2

I. ①数… II. ①王… III. ①数字信号处理—高等学校—教材 IV. ①TN911.72

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第195994号

策划编辑:王羽佳

责任编辑:王晓庆

印 刷:

装 订:

出版发行:电子工业出版社

北京市海淀区万寿路173信箱 邮编:100036

开 本:787×1092 1/16 印张:16.5 字数:476千字

版 次:2013年5月第1版

2018年9月第2版

印 次:2018年9月第1次印刷

定 价:45.00元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系,联系及邮购电话:(010) 88254888, 88258888。

质量投诉请发邮件至 zlt@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式:(010) 88254535, wyj@phei.com.cn。

前 言

本书第1版出版后,承蒙各兄弟院校的厚爱与支持,已经重印多次。根据数字信号处理技术发展和多年教学实践,本次再版在内容上做了较大的更新,使理论教学和仿真环节更加紧密结合,优化和补充实验内容,增加 MATLAB 集成功能强大的滤波器设计工具 FDATool(Filter Design and Analysis Tool)方面的内容(简介),该工具可以完成多种滤波器的设计、分析和性能评估,进一步突出理论和实际的有机结合,删除部分相关性不紧密的仿真内容,进一步反映数字信号处理技术的发展和教学内容的更新。

信息和计算机技术的突飞猛进促使信号处理技术迅速发展,尤其是数字信号处理技术,借助于计算机、DSP 软硬件、FPGA 和 MATLAB 第三方环境,数字信号处理技术在许多领域得到了广泛应用,并且形成极其重要的学科。目前,高等学校的电子信息工程、通信工程、电气工程及其自动化、测控技术与仪器、自动化、轨道交通信号与控制等专业已将“数字信号处理”设为一门重要的专业基础课,并通过理论和实验教学,使学生掌握数字信号处理的基本理论、基本分析方法和实现手段。

数字信号处理理论性强,涉及面广,与先修课程高等数学、复变函数、电路分析、信号与系统等有较强的关联性。学生在初学时往往感到抽象,理解困难,掌握难度大,如果处理不当,会使学生望而生畏,失去学习兴趣。因此,为适应教育改革的需要,结合教材的现状,作者经过多年本科教学实践,并密切关注学科和技术及教育的发展,深刻体会到编写既能适合理论教学、又加强实验环节、贴近教学实际需要的《数字信号处理》特色教材的必要性。

作者从事“数字信号处理”课程教学多年,有一定的教学经验和体会,参考国内外许多优秀教材,博采众长,为适应教育改革和教材建设的需要,本着培养应用型人才的宗旨,突出“实用性”,强调以“针对性”和“够用”为基本原则,进行本书编写。编写过程对涉及的基本原理、基本方法、基本概念等叙述透彻,阐述准确明晰,对于理论的深度和内容的广度处理,力求满足应用型人才培养的基本要求。

书中贯穿有针对性的 MATLAB 仿真实例,做到理论问题直观化,复杂问题简单化,并且突出理论与实践的密切结合。本书适用专业宽泛,可作为高等学校电子信息工程、电子信息科学与技术、通信工程、测控技术与仪器、自动化、电气工程及其自动化、轨道交通信号与控制等专业的教学用书,也可作为电类工程技术人员的参考用书。

本书共8章,第1章主要讨论时域离散信号和系统,包括常用典型信号的表示和运算,离散系统的线性移不变、因果和稳定性,输入/输出描述法——差分方程,模拟信号的数字处理方法及信号的重构,以及与本章相关的应用实例和 MATLAB 仿真。

第2章主要讨论时域离散信号和系统的频域分析,涉及非周期离散时间傅里叶变换(DTFT)的定义和性质, Z 变换(ZT)的定义、收敛域、性质、 Z 反变换及利用 Z 变换分析信号和系统的频域特性,讨论了IIR和FIR网络结构,以及结合本章内容的实例和 MATLAB 仿真。

第3章主要讨论离散有限长序列的傅里叶变换(DFT),涉及周期序列的离散傅里叶级数(DFS)、离散傅里叶变换的定义和性质、DFT与 Z 变换的关系、频域抽样定理、DFT的应用实例、用DFT计算线性卷积和信号的谱分析、频谱泄漏和栅栏效应,以及 MATLAB 在本章实例中的应用等内容。

第4章重点讲述快速傅里叶变换(FFT),主要涉及直接计算DFT的特点及减少运算量的基本途径,按时域抽取的FFT(DIT-FFT)算法基本原理、运算规律及编程思想,FFT算法与直接计算DFT

运算量的比较，按频域抽取的 FFT（DIF-FFT）算法原理及反变换（IDFT）的快速算法。

第 5 章主要讨论无限长单位脉冲响应（IIR）数字滤波器的设计，介绍数字滤波器的基本概念，概述模拟滤波器的设计方法，详细讲述用冲激响应不变法和双线性变换法的离散化原理、适用范围和各自的优缺点，给出 IIR 数字滤波器两种频率变换法设计及本章的应用实例和 MATLAB 仿真。

第 6 章着重讨论有限长单位脉冲响应（FIR）数字滤波器的设计，涉及线性相位 FIR-DF 的条件和特点，利用窗函数法设计 FIR-DF，对 IIR 与 FIR 数字滤波器的特性进行比较，并结合本章内容给出应用实例和 MATLAB 仿真等内容。

第 7 章主要讨论数字滤波器的实现的量化效应等相关问题。

第 8 章集中讨论实验仿真的内容，并提供 8 个方面的 MATLAB 仿真实验，目的在于加强学生对数字信号处理理论方面的深入理解，增强理论与实践结合的能力。

最后安排 4 个附录，附录 A 为巴特沃斯滤波器系统函数分母多项式系数和特征方程的根（极点），附录 B 为切比雪夫低通滤波器设计，附录 C 为等比级数前 N 项和公式及其应用举例，附录 D 为 MATLAB 简介。

教学中，可以根据教学对象和学时等具体情况对书中的内容进行删减和组合，也可以进行适当扩展。为适应教学模式、教学方法和手段的改革，本书配套多媒体电子课件、仿真程序代码和习题参考答案，请登录华信教育资源网（<http://www.hxedu.com.cn>）注册下载。

本书由长春理工大学光电信息学院/吉林大学王春民教授主编，编写第 5 章并负责本书的统稿工作；蒲鑫编写绪论、第 1 章和第 7 章部分内容；郑海峰编写第 2 章、第 3 章、第 4 章和第 6 章；尹晶编写第 8 章和附录及第 5 章的部分内容；王强参与编写第 7 章部分内容。长春理工大学光电信息学院的崔艳群讲师和刘春艳讲师参与了全书的校对；长春理工大学光电信息学院的乔良副教授、张晶副教授、白烨实验教师也参与了部分工作。

我们在编写过程中参考了国内外许多优秀教材，在完善本书内容方面起到了积极作用，在此深表谢意。本书的编写得到了长春理工大学光电信息学院和电子分院、吉林大学仪器科学与电气工程学院的大力支持，在此表示由衷的感谢。

由于作者的水平有限，书中不妥和错误之处在所难免，恳请专家和读者批评指正。

作 者

于长春

2018 年 8 月

目 录

绪论.....	1
第 1 章 时域离散信号和系统	5
1.1 引言	5
1.2 时域离散信号与序列运算	5
1.2.1 时域离散信号及其表示	5
1.2.2 序列的运算	6
1.2.3 序列的能量、周期性及常用典型序列	18
1.3 时域离散系统	23
1.3.1 线性系统	24
1.3.2 移不变系统	25
1.3.3 线性移不变系统	26
1.3.4 系统的因果性和稳定性	28
1.4 模拟信号数字处理方法	30
1.4.1 采样定理及 A/D 转换器	30
1.4.2 采样信号的恢复	32
1.5 本章小结	34
习题 1	35
第 2 章 离散系统的变换域分析与系统结构	38
2.1 引言	38
2.2 序列 Z 变换的定义和收敛域	38
2.3 Z 变换的基本性质和定理	43
2.4 Z 反变换	44
2.5 非周期序列的傅里叶变换及其性质	49
2.5.1 非周期序列的傅里叶变换	49
2.5.2 非周期序列傅里叶变换的性质	51
2.6 序列的傅里叶变换、 Z 变换和拉普拉斯变换的关系	55
2.6.1 序列 $x(n)$ 的傅里叶变换与序列 $x(n)$ 的 Z 变换之间的关系	55
2.6.2 序列的 Z 变换与拉普拉斯变换之间的关系	55
2.6.3 连续信号 $x_a(t)$ 的傅里叶变换 $X_a(j\Omega)$ 与序列 $x(n)$ 的 Z 变换 $X(z)$ 之间的关系	56
2.7 离散系统的系统函数和变换域分析	56
2.7.1 频率响应和系统函数	57
2.7.2 系统函数、频率响应和差分方程的关系	57
2.7.3 系统函数与系统稳定因果性的关系	59
2.8 离散系统的基本网络结构	60
2.8.1 离散系统的方框图表示	60
2.8.2 无限长单位脉冲响应 (IIR) 滤波器基本网络结构	61
2.8.3 有限长单位脉冲响应 (FIR) 滤波器基本网络结构	64
2.9 本章小结	66
习题 2	67

第3章 离散傅里叶变换(DFT)	72
3.1 周期序列的离散傅里叶级数	72
3.2 离散傅里叶变换	74
3.2.1 离散傅里叶变换的定义式	74
3.2.2 DFT与ZT、FT之间的关系	75
3.3 离散傅里叶变换的性质	77
3.3.1 隐含周期性	77
3.3.2 线性性质	78
3.3.3 循环移位性质	78
3.3.4 循环卷积性质	79
3.3.5 共轭对称性	82
3.4 频率域采样理论	83
3.5 应用实例	84
3.5.1 利用DFT求卷积和	84
3.5.2 利用DFT对信号进行近似谱分析	84
3.6 本章小结	88
习题3	88
第4章 快速傅里叶变换(FFT)	91
4.1 引言	91
4.2 基-2FFT算法	91
4.2.1 直接计算DFT的特点及减少运算量的基本途径	91
4.2.2 按时间抽取的基-2FFT的基本原理	93
4.2.3 DIT-FFT算法特点与运算量	97
4.2.4 按频域抽取的基-2FFT的基本原理	98
4.2.5 IDFT的高效算法	101
4.3 应用实例	102
4.4 MATLAB仿真	103
4.4.1 利用FFT求圆周卷积和线性卷积	103
4.4.2 利用FFT进行频谱分析	104
4.5 本章小结	106
习题4	107
第5章 无限长单位脉冲响应(IIR)数字滤波器的设计	109
5.1 引言	109
5.2 滤波器性能指标与设计步骤	109
5.2.1 滤波器概述	109
5.2.2 数字滤波器的性能指标	112
5.2.3 常用模拟滤波器设计方法	114
5.3 冲激响应不变法	120
5.3.1 变换原理	120
5.3.2 模拟滤波器的数字化方法	121

5.3.3 用冲激响应不变法实现 IIR 数字滤波器.....	122
5.3.4 冲激响应不变法的优点和缺点.....	123
5.4 双线性变换法.....	127
5.4.1 变换原理.....	127
5.4.2 模拟滤波器的数字化方法.....	128
5.4.3 用双线性变换法实现 IIR 数字滤波器.....	130
5.5 用模拟低通滤波器设计 IIR 数字滤波器.....	132
5.5.1 模拟低通滤波器转换成数字低通滤波器.....	133
5.5.2 模拟低通滤波器转换成数字带通滤波器.....	136
5.5.3 模拟低通滤波器转换成 IIR 数字高通滤波器.....	141
5.5.4 模拟低通滤波器转换成 IIR 数字带阻滤波器.....	145
5.5.5 数字域的频率变换法设计.....	150
5.5.6 IIR 数字滤波器综合设计举例.....	160
5.6 本章小结.....	170
习题 5.....	171
第 6 章 有限长单位脉冲响应 (FIR) 数字滤波器的设计.....	173
6.1 线性相位 FIR 滤波器的含义与特点.....	173
6.1.1 线性相位系统的时域特点.....	173
6.1.2 线性相位系统的幅度特点.....	174
6.1.3 线性相位 FIR 数字滤波器零点分布的特点.....	176
6.2 FIR 数字滤波器的线性相位结构.....	176
6.3 用窗函数法设计 FIR 数字滤波器.....	178
6.4 IIR 滤波器与 FIR 滤波器的对比.....	190
6.5 本章小结.....	190
习题 6.....	191
第 7 章 数字信号处理中的有限字长效应.....	195
7.1 引言.....	195
7.2 二进制数的表示及 A/D 转换的量化效应.....	195
7.2.1 二进制数的表示.....	195
7.2.2 定点制的量化误差.....	197
7.2.3 A/D 转换的量化效应.....	200
7.3 数字滤波器的系数量化效应.....	202
7.3.1 系数量化对滤波器零、极点位置的影响.....	202
7.3.2 IIR 数字滤波器的有限字长效应.....	204
7.3.3 FIR 数字滤波器的有限字长效应.....	205
7.4 FFT 算法的有限字长效应.....	206
7.4.1 定点 FFT 计算中的有限字长效应.....	206
7.4.2 系数量化对 FFT 的影响.....	208
7.5 本章小结.....	209
习题 7.....	209

第8章 MATLAB 仿真实验	211
实验一 离散系统的时域分析	211
实验二 离散系统的时域特性	214
实验三 时域采样	218
实验四 频域采样	221
实验五 离散系统的复频域分析	223
实验六 DFT/FFT 频谱分析及应用	227
实验七 IIR 数字滤波器的设计	232
实验八 FIR 数字滤波器的设计	236
附录 A 巴特沃斯低通滤波器系统函数分母多项式系数和特征方程的根 (极点)	240
附录 B 切比雪夫低通滤波器设计	241
附录 C 等比级数前 N 项和公式及其应用举例	246
附录 D MATLAB 简介	247
参考文献	255

绪 论

信息技术的蓬勃发展正在改变着人类的生产和生活。计算机技术及电子技术的发展推动了数字信号处理技术的发展,数字信号处理技术也同样促进了计算机技术的发展。信号是信息的载体,信号处理是研究对含有信息的信号进行处理(变换),以获得人们所希望的信号,从中提取信息、利用信息的一门学科。由于模拟信号难以做到高精度,并且可靠性差、不灵活,故随着大规模集成电路和数字信号处理技术的成熟和发展,现在用数字方法处理信号(数字信号处理)已基本取代了模拟信号处理。

数字信号处理就是利用数字计算机或专用数字硬件对数字信号进行变换、加工处理运算,用数字的数值计算方法处理,达到提取有用信息的目的。国际上一般把1965年由Cooley-Turkey提出的快速傅里叶变换(FFT)作为数字信号处理这一学科的产生时间。

数字信号处理把数字或符号表示成序列,通过计算机或专用处理设备,用数字的方式去处理这些序列,以达到更符合人们要求的信号形式。例如,对信号的滤波,提取和增强信号的有用分量,削弱无用的分量,或估计信号的某些特征参数。总之,凡是用数字方式对信号进行滤波、变换、增强、压缩、估计、识别等,都是数字信号处理的研究对象。

1. 数字信号处理系统的组成

数字信号处理的目的是利用计算机或专用数字信号处理设备来处理信号以得到有用信息,但是计算机或专用数字信号处理设备只能处理时域上是离散的、频域上也是离散的信号。由于现实世界中的信号多为连续信号,要实现对现实世界连续信号的处理,必须先进行模数转换。通常,数字信号处理系统由前置预滤波器、A/D转换器、数字信号处理器、D/A转换器、模拟滤波器组成。数字信号处理系统的组成框图如图0-1所示。

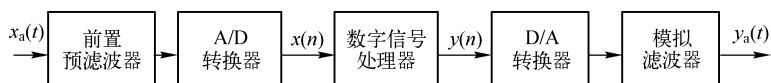


图0-1 数字信号处理系统的组成框图

模拟信号先经过前置预滤波器,将输入信号中高于某一频率(称为折叠频率,等于抽样频率的一半)的分量加以滤除,使进入A/D转换器中的信号在某一频率范围内。A/D转换器通过抽样保持、量化、编码的过程,对信号进行数字化处理,将模拟信号用数字信号表示,时间离散化、幅度离散化是这种数字信号的特点,可以用二进制序列 $x(n)$ 来表示。数字信号处理器(DSP)对输入的数字信号 $x(n)$ 进行变换,加工处理得到输出信号 $y(n)$ 。D/A转换器将数字信号 $y(n)$ 变成模拟信号,这些模拟信号在时间上的幅度等于序列 $y(n)$ 中相应数码所代表的数值。模拟滤波器滤除不必要的高频分量,形成平滑的模拟输出信号 $y_a(t)$ 。

当然实际的系统并不一定包括所有框图,例如,有些系统只需数字输出,可直接以数字形式显示或打印,那么就不需要D/A转换器了。另外一些系统,其输入就是数字量,因而就不需要A/D转换器了。对于纯数字系统,则只需要数字信号处理器这一核心部分即可。

2. 数字信号处理的学科概貌

数字信号处理的基本工具包括微积分、概率统计、随机过程、高等代数、数值分析、近世代数和

复变函数。语音信号处理、数字图像处理和模式识别都是在数字信号处理基础上发展起来的学科。数字信号处理的理论基础是线性移不变（LSI）系统理论和离散傅里叶变换（DFT）。

数字信号处理的学科概貌如图 0-2 所示，其中，时域离散线性移不变（LSI）系统理论和离散傅里叶变换（DFT）是数字信号处理领域的理论基础，而数字滤波和数字频谱分析是数字信号处理的两个基本学科分支。

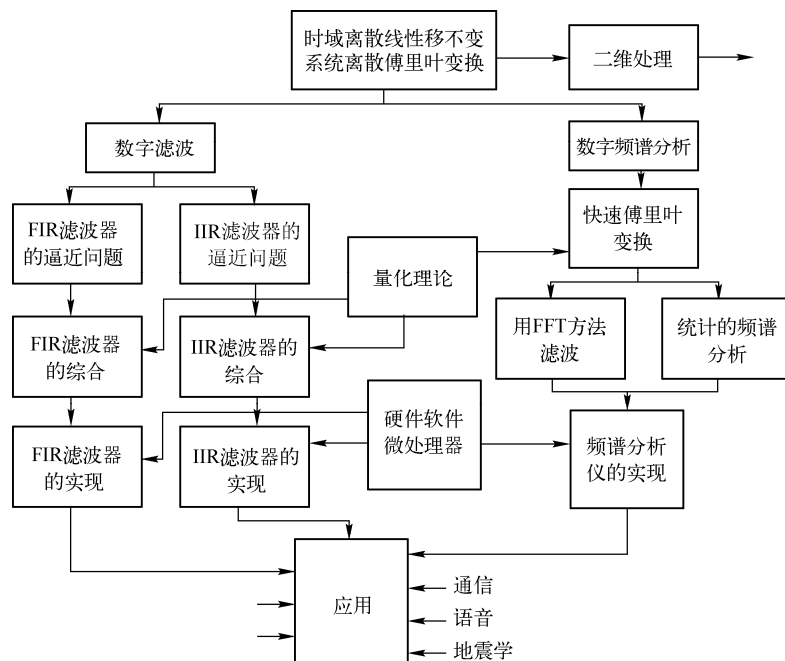


图 0-2 数字信号处理的学科概貌

数字滤波领域则分为无限长单位脉冲响应（IIR）数字滤波器和有限长单位脉冲响应（FIR）数字滤波器两部分内容。包括它们的数学逼近问题、综合问题（包括选择滤波器结构和选择运算字长）及具体的硬件或计算机软件实现问题。

数字频谱分析领域包括两部分内容：（1）确定信号的频谱分析，这可采用离散傅里叶变换（DFT）法来进行分析，对于较复杂的情况，可采用线性调频Z变换（CZT）；（2）随机信号的频谱分析，这就是统计谱分析法。实际谱分析技术中都要用到快速傅里叶变换（FFT）和一些快速卷积算法。FFT还可用来实现 FIR 数字滤波运算，而统计频谱分析法又可用于研究数字信号处理系统的量化噪声效应（二维和三维信号处理则是最新发展的领域）。

3. 数字信号处理的特点

数字信号处理采用数字系统完成信号处理的任任务，它具有数字系统的一些共同优点，如抗干扰、可靠性强、便于大规模集成等。除此之外，与传统的模拟信号处理方法相比较，它还具有以下一些明显优点。

（1）精度高。模拟网络的精度由元器件决定，在模拟系统的电路中，元器件精度要达到 10^{-3} 以上已经不容易了，而数字系统 17 位字长可以达到 10^{-5} 的精度，这是很平常的。例如，基于离散傅里叶变换的数字式频谱分析仪，其幅值精度和频率分辨率均远远高于模拟频谱分析仪。

（2）灵活性高。数字信号处理采用了专用或通用的数字系统，数字系统的性能主要取决于运算程序和乘法器的系数，而系数是存放在系数存储器中的，只需改变运算程序或存储的系数，就可得到不

同的系统,比改变模拟系统方便得多。

(3) 可靠性高。因为数字系统只有两个信号电平“0”“1”,因而受周围环境温度及噪声的影响较小,而模拟系统中,各元器件都有一定的温度系数,且电平是连续变化的,易受温度、噪声、电磁感应等的影响。如采用大规模集成电路,可靠性就更高。

(4) 易于大规模集成。由于数字部件有高度规范性,便于大规模集成和大规模生产。

(5) 时分复用。也就是利用数字信号处理器同时处理几个通道的信号。处理器运算速度越高,能处理的信道数目也就越多。

(6) 可获得高性能指标。例如,对信号进行频谱分析,模拟频谱仪在频率低端只能分析 10Hz 以上频率,且难于做到高分辨率(足够窄的带宽),但在数字的谱分析中,已能做到 10^{-3}Hz 的谱分析。又如有限长冲激响应数字滤波器,可实现准确的线性相位特性,这在模拟系统中是很难达到的。并且,数字系统可以实现模拟系统很难达到的指标或特性。例如,有限长单位脉冲响应数字滤波器可以实现严格的线性相位;在数字信号处理中可以将信号存储起来,用延迟的方法实现非因果系统,从而提高了系统的性能指标。

(7) 二维与多维处理。利用庞大的存储单元,可以存储二维的图像信号或多维的阵列信号,实现二维或多维的谱分析,以及实现二维甚至多维信号的处理,包括二维或多维滤波及谱分析等。

数字信号处理系统也有局限性,例如,增加了系统的复杂性,需要模拟接口及比较复杂的数字系统;应用的频率范围受到限制,主要是 A/D 转换器的抽样频率的限制;系统的功率消耗比较大,数字信号处理系统中集成了几十万甚至更多的晶体管,而模拟信号处理系统中大量使用的是电阻、电容、电感等无源器件,随着系统复杂性的增加,这一矛盾会更加突出。另外,在实时性方面,还不如模拟系统(但随着计算机处理速度和 DSP 处理实时性的不断提高,该问题并不突出)。

4. 数字信号处理的发展及应用

数字信号处理由于其独特的学科特点形成了其发展规律。

(1) 由简单的运算向复杂的运算发展,目前几十位乘几十位的全并行乘法器可以在几纳秒的时间内完成一次浮点乘法运算,这在运算速度上和运算精度上均为复杂的数字信号处理算法提供了先决条件。

(2) 由低频向高频发展,模数转换器的抽样频率已高达数百兆赫兹,可以将视频甚至更高频率的信号数字化后送入计算机处理。

(3) 由一维向多维发展,像高分辨率彩色电视、雷达、地质和石油勘探等多维信号处理的应用领域已与数字信号处理结下了不解之缘。

(4) 各种数字信号处理系统几经更新换代,在图像处理方面,图像数据压缩是多媒体通信、影碟机(VCD 或 DVD)和高清晰度电视(HDTV)的关键技术。国际上先后制定的标准 H.261、JPEG、MPEG-1 和 MPEG-2 中均使用了离散余弦变换(DCT)算法。近年来发展起来的小波(Wavelet)变换也是一种具有高压缩比和快速运算特点的崭新压缩技术,应用前景十分广阔,有望成为新一代压缩技术的标准。

数字信号处理具有突出优点,因而在通信、语音、雷达、地震测报、声呐、遥感、生物医学、电视、仪器中得到愈来愈多的应用,如程控交换机、移动通信系统、数字照相机、液晶电视、家庭影院、全球定位系统(GPS)、医院用的 B 超、CT、核磁共振、卫星遥感遥测、天气预报、地震预报、地震探矿、数字化士兵和数字化战争等。

数字信号处理还在不断开辟新的应用领域,在机械制造中,基于 FFT 算法的频谱分析仪用于振动分析和机械故障诊断;医学中使用数字信号处理技术对心电(ECG)和脑电(EEG)等生物电信号进

行分析和处理；数字音频广播（DAB）广泛地使用了数字信号处理技术。除此之外，数字信号处理在机器人控制、虚拟仪器系统和汽车电子方面也有着长足的应用。可以说，数字信号处理技术已在信息处理领域引起了广泛的关注和高度的重视，数字化已经进入各个领域并影响着人们的生活。

5. 数字信号处理系统的实现

数字信号处理系统的实现主要有以下几种方法。

（1）利用通用计算机用软件实现。软件采用高级语言编写，也可利用商品化的各种 DSP 软件。MATLAB 是美国 MathWorks 公司出品的商业数学软件，用于算法开发、数据可视化、数据分析及数值计算的高级技术计算语言和交互式环境，主要包括 MATLAB、Simulink 和符号运算三部分。该方法实现简单、灵活，但实时性较差，很少用于实时系统，主要用于教学和科研的前期研制阶段。另外，Lyrtech 推出了 Lyrtech Signal Processing（LSP）快速原型开发平台。该平台继承了 MATLAB/Simulink 算法仿真环境和 DSP+FPGA 的快速原型开发板，无缝地实现了自顶向下的开发流程。LSP 信号处理快速原型开发系统由一系列硬件板卡和相对应的软件模块组成，该系统为用户提供了两种开发流程——系统级开发流程和底层开发流程，用户可以根据自己的开发习惯进行自由选择。LSP 快速开发平台已广泛应用于无线通信、音视频信号处理、航天航空国防控制和汽车电子等各个领域。

（2）利用单片机。单片机技术发展现已相当成熟，不仅价格便宜，而且功能很强。可根据不同环境选用不同型号的单片机，用来进行实时控制，但数据运算量不能太大。

（3）利用通用 DSP 芯片。DSP 芯片与单片机相比有更为突出的优点，如 DSP 内部带有乘法器、累加器，采用流水线工作方式及并行结构，多总线速度快，配有适于信号处理的指令（如 FFT 指令）等。

目前市场上的 DSP 芯片有美国德州仪器公司（TI）的 TMS320CX 系列，AT&T 公司的 DSP16、DSP32 系列，Motorola 公司的 DSP56x、DSP96x 系列和 AD 公司的 ADSP21×、ADSP210×系列等。

（4）利用特殊用途的 DSP 芯片。是指专门用于 FFT、FIR 滤波器，实现卷积、相关运算等的专用数字芯片。目前此类 DSP 芯片有 BB 公司的 DF17××系列，MAXIM 公司的 MAXIM27×、MAXIM28×系列，National 公司的 National-SEMI 系列和 MF 系列等。其软件算法已在芯片内部用硬件电路实现，使用者只需给出输入数据，便可在输出端直接得到输出数据。

（5）一些典型的数字信号处理算法，如 FFT、FIR 和 IIR 滤波器，可以采用 FPGA 实现。FPGA 是现场可编程门阵列（Field Programmable Gate Array）的简称，能够以低系统开销和低成本实现高速乘-累加操作，并且可以高效地实行并行运算，尤其是对于滤波这样的重复任务，并行处理远超串行架构。FPGA 在硬件设计方面，使用硬件描述语言 HDL（Hardware Description Language）。现在有两种 HDL 语言，一种是 VHDL，另一种是 Verilog HDL，两种语言对 FPGA 实现数字信号处理都适用。

第1章 时域离散信号和系统



学习重点

- ★ 掌握信号的分类、时域离散信号的表示。
- ★ 掌握序列的运算、序列的周期性及常用典型序列，学会判断序列的周期性。
- ★ 掌握时域离散系统的线性、因果性、稳定性。
- ★ 掌握信号的抽样频率选取条件，以及抽样信号恢复原始信号的原理。
- ★ 了解数字信号处理的分析方法及 MATLAB 仿真。

1.1 引言

时域离散信号和系统的时域、频域分析是数字信号处理的基础理论。在信号分析与处理理论中，通常将信号的自变量作为时间变量。信号可以按变量的取值是否连续进行分类：时间连续的信号称为时域连续信号；时间连续且幅值连续的信号称为模拟信号；时间离散的信号常称为时域离散信号。

信号是传递信息的函数。按照信号的分类，信号处理分为模拟信号处理和数字信号处理两类。处理信号的设施称为系统，如果系统的输入、输出都是模拟信号，则称为时域连续系统（简称模拟系统）；如果系统的输入、输出是时域离散信号，则称为时域离散系统（简称离散系统）。

按照信号特点的不同，信号可以表示成一个或几个独立变量的函数。例如，某个地区气温随时间变化的函数是一元函数；全国各地气温随时间变化的函数是二元函数。一维变量可以是时间，也可以是其他参量，习惯上将其看成时间。信号可以分为以下几种。

（1）时域连续信号，其特点是时间连续，信号幅度函数取值可以是连续的，也可以是离散的。

时域连续信号是在连续时间范围内定义的信号，但信号的幅值可以是连续数值，也可以是离散数值。当幅值为连续变量时，又常称为模拟信号。

（2）时域离散信号，其特点是时间离散，函数取值连续。

时域离散信号是时间为离散变量的信号，即时间被量化了，而幅度仍是连续变化的信号。

（3）数字信号，其特点是时间离散，幅度函数取值量化。

数字信号是时间离散且幅度量化的信号，即时间变量被量化了，幅度函数取值为离散量化值的信号。

在本书中，主要把一维、确定的时域离散信号和时域离散系统作为研究的对象。

1.2 时域离散信号与序列运算

1.2.1 时域离散信号及其表示

时域离散信号只在离散时间上给出函数值，是时间上不连续的序列。

离散时间信号可以通过对连续时间信号抽样获得，用序列 $x(n)$ 来表示。但 $x(n)$ 具有更加广泛的含义，它不仅表示时间信号，也可以表示非时间信号。例如，某一时刻世界各地的气温就不是按时间顺序排列的序列。在研究这类信号时，通常可以将自变量视为时间信号。

若连续时间信号为 $x(t)$ ，抽样周期为 T ，则抽样得到离散时间信号（序列）

$$x(n) = x_a(t)|_{t=nT} = x_a(nT) = x(nT) \quad (1-1)$$

式中, 序号 n 为整数 ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), 表示第 n 个抽样时间点。当 n 为非整数时, 序列 $x(n)$ 无定义。 $x(n)$ 既是序列的第 n 个序列值, 又代表整个序列。

序列的表示方式有列举法、表达式表示法和序列波形表示法。例如, 一个有限长序列在区间 $-2 \leq n \leq 4$ 具有非零值, 则相应序列值依次为: $x(-2)=-1$, $x(-1)=0$, $x(0)=1$, $x(1)=2$, $x(2)=3$, $x(3)=4$, $x(4)=5$ 。

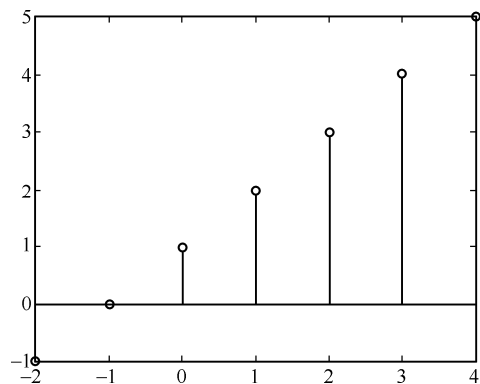


图 1-1 序列波形表示

用列举法表示为

$$x(n) = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

其中箭头所指项为 $x(0)$, 若无箭头, 则序列从 $x(0)$ 项开始。

表达式为

$$x(n) = \begin{cases} n+1 & -2 \leq n \leq 4 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

序列波形如图 1-1 所示。

要点一: 时域离散信号的表示方法有列举法、表达式表示法和序列波形表示法。

1.2.2 序列的运算

序列的基本运算主要包括相加、相乘、累加和、差分、移位、反褶、尺度变换(抽取和插值)、线性卷积和。其中, 差分、累加和分别对应于连续时间信号的微分和积分运算。

假设有两个序列, 其波形如图 1-2 所示。

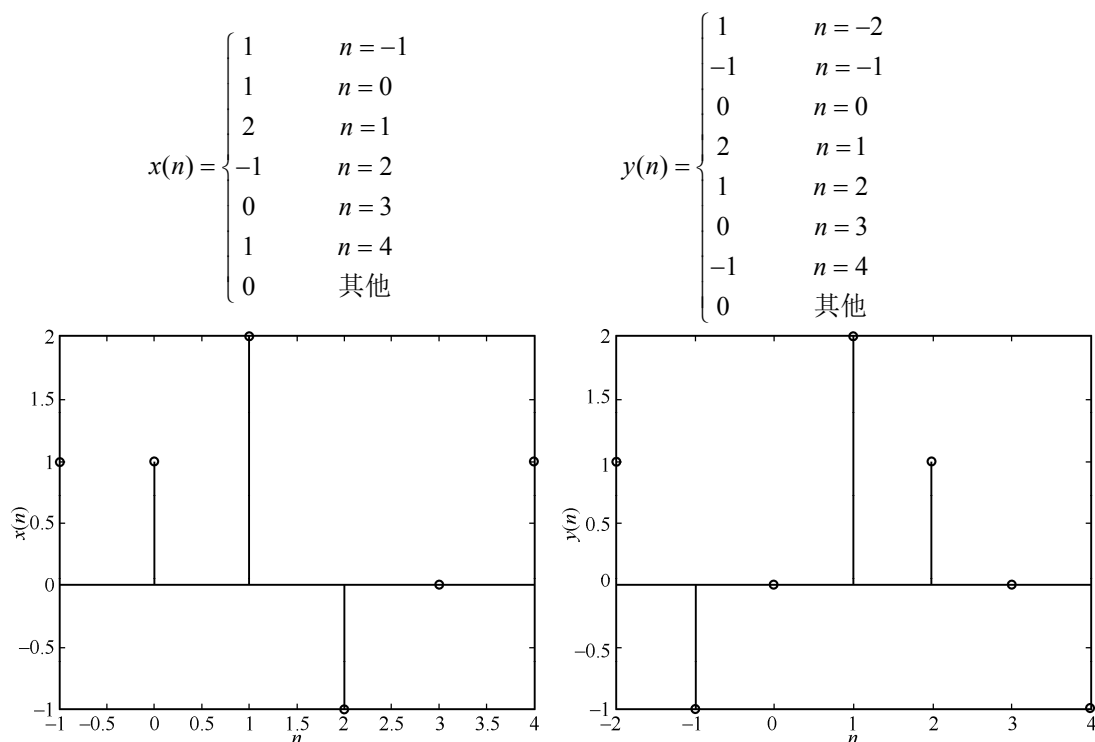


图 1-2 序列波形图

下面以这两个序列为例，介绍序列的基本运算。

1. 相加

两个序列相加是指同序列号的两个序列值逐项对应相加。表达式为

$$z(n) = x(n) + y(n) \quad (1-2)$$

【例 1-1】 计算如图 1-2 所示的序列 $x(n)$ 与序列 $y(n)$ 的和序列 $z(n)$ 。

解： $z(-2) = x(-2) + y(-2) = 0 + 1 = 1$

$z(-1) = x(-1) + y(-1) = 1 + (-1) = 0$

$z(0) = x(0) + y(0) = 1 + 0 = 1$

$z(1) = x(1) + y(1) = 2 + 2 = 4$

$z(2) = x(2) + y(2) = (-1) + 1 = 0$

$z(3) = x(3) + y(3) = 0 + 0 = 0$

$z(4) = x(4) + y(4) = 1 + (-1) = 0$

其余的序列值为 0，序列 $z(n)$ 为序列 $x(n)$ 与序列 $y(n)$ 的和序列。

要点二：两个序列相加是指同序列号的两个序列值逐项对应相加，得到一个新的序列。

2. 相乘

两个序列相乘是指同序列号的两个序列值逐项对应相乘。表达式为

$$z(n) = x(n) \cdot y(n) \quad (1-3)$$

【例 1-2】 计算如图 1-2 所示的序列 $x(n)$ 与序列 $y(n)$ 的乘积序列 $z(n)$ 。

解：同序列号的两个序列值对应相乘得：

$$z(n) = \begin{cases} 0 & n = -2 \\ -1 & n = -1 \\ 0 & n = 0 \\ 4 & n = 1 \\ -1 & n = 2 \\ 0 & n = 3 \\ -1 & n = 4 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

要点三：两个序列相乘是指同序列号的两个序列值逐项对应相乘，得到一个新的序列。

MATLAB 编程求例 1-1 和例 1-2 两个序列的和、乘积。

1. 建立一个主函数，命名为 main.m，程序如下：

```
n1=-1:4;
n2=-2:4;
x1=[1,1,2,-1,0,1,0];
x2=[1,-1,0,2,1,0,-1,0];
[y3,n]=sigadd(x1,n1,x2,n2);
[y,n]=sigcheng(x1,n1,x2,n2);
subplot(2,2,1);
stem(n1,x1,'.');
grid;
xlabel('n1');
ylabel('x1');
subplot(2,2,2);
```

```

stem(n2,x2,'. ');
grid;
xlabel('n2');
ylabel('x2');
subplot(2,2,3);
stem(n,y3,'. ');
grid;
title('序列加');
xlabel('n');
ylabel('y3');
subplot(2,2,4);
stem(n,y,'. ');
grid;
title('序列积');
xlabel('n');
ylabel('y');

```

2. 建立一个加法函数, 命名为 `sigadd.m`, 程序如下:

```

function[y3,n]=sigadd(x1,n1,x2,n2)n=min(min(n1),min(n2)):max(max(n1),max(
n2));

y1=zeros(1,length(n));
y2=zeros(1,length(n));
y1(find((n>=min(n1))&(n<=max(n1))==1))=x1;
y2(find((n>=min(n2))&(n<=max(n2))==1))=x2;
y3=y1+y2;

```

3. 建立一个乘法函数, 命名为 `sigcheng.m`, 程序如下:

```

function[y,n]=sigcheng(x1,n1,x2,n2)
n=min(min(n1),min(n2)):max(max(n1),max(n2));
y1=zeros(1,length(n));
y2=zeros(1,length(n));
y1(find((n>=min(n1))&(n<=max(n1))==1))=x1;
y2(find((n>=min(n2))&(n<=max(n2))==1))=x2;
y=y1.*y2;

```

注: 三个程序分别编译。

编程结果如图 1-3、图 1-4 所示。

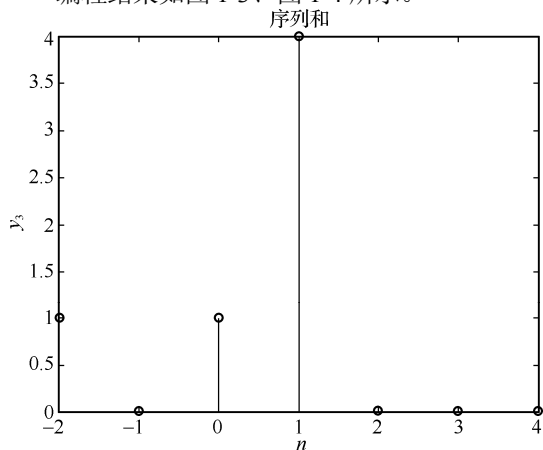


图 1-3 序列和

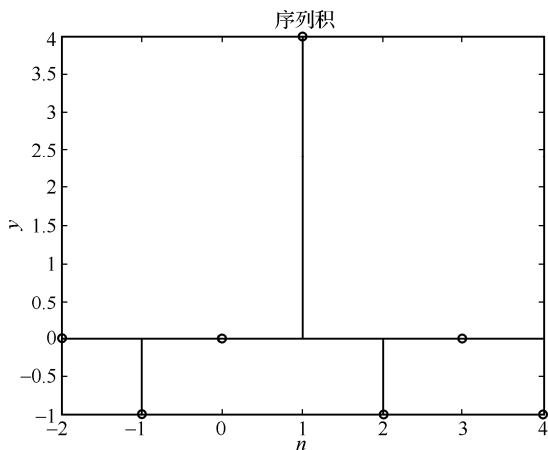


图 1-4 序列积

3. 累加和

序列的累加和为该序列的前 n 项值的和的序列，定义式为

$$z(n) = \sum_{m=-\infty}^n x(m) \quad (1-4)$$

序列的累加和运算类似于连续信号的积分运算。

【例 1-3】 计算如图 1-2 所示的序列 $x(n]$ 的累加和序列 $z(n)$ 。

解: $z(-1) = 1$ ，即 $n = -1$ 的序列值与 $n = -1$ 以前的所有序列值的和；

$z(0) = 2$ ，即 $n = 0$ 的序列值与 $n = 0$ 以前的所有序列值的和；

⋮

$z(4) = 4$ ，即 $n = 4$ 的序列值与 $n = 4$ 以前的所有序列值的和。

当 n 取其他值时，累加和序列的所有值都为 4。

其累加和的序列波形如图 1-5 所示。

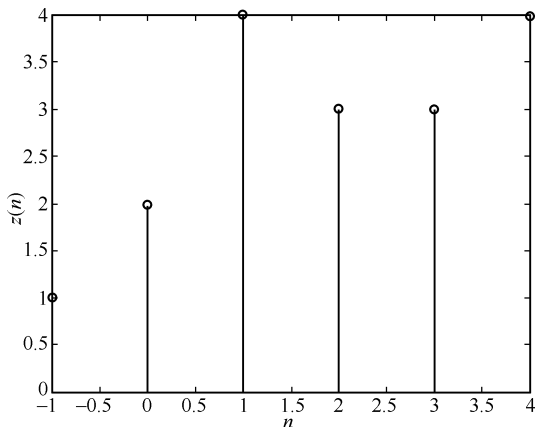


图 1-5 序列累加和

要点四：计算序列的累加和得到一个新的序列，新序列的第 n 项序列值为原序列的前 n 项序列值的和。

4. 移位

序列的移位序列可以表示序列的延时或超前序列。延序列表示为序列右移，当 $m > 0$ 时， $x(n-m)$ 表示序列 $x(n)$ 的右移序列（或延序列）；超前序列表示为序列左移，当 $m > 0$ 时， $x(n+m)$ 表示序列 $x(n)$ 的左移序列（或超前序列）。

【例 1-4】 计算如图 1-2 所示的序列 $x(n)$ 的移位序列 $x(n-1)$ 与 $x(n+1)$ 。

解:

$$x(n-1) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 1 & n = 1 \\ 2 & n = 2 \\ -1 & n = 3 \\ 0 & n = 4 \\ 1 & n = 5 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad x(n+1) = \begin{cases} 1 & n = -2 \\ 1 & n = -1 \\ 2 & n = 0 \\ -1 & n = 1 \\ 0 & n = 2 \\ 1 & n = 3 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

波形如图 1-6 所示。

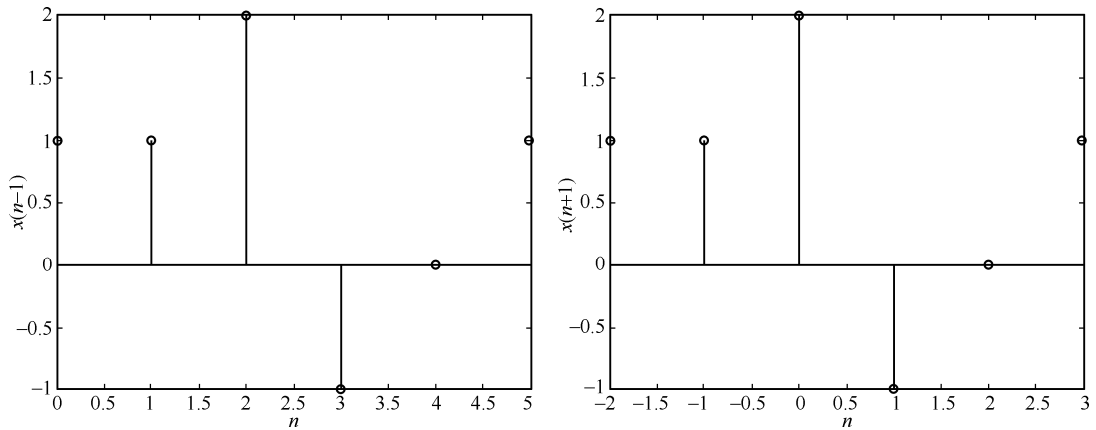


图 1-6 序列的移位

要点五：序列右移得到原序列的延序列，表示为 $x(n-m)$ ；序列左移得到原序列的超前序列，表示为 $x(n+m)$ 。

5. 反褶（反转）

序列 $x(n]$ 以 $n=0$ 为纵对称轴进行翻褶，形成的序列称为序列 $x(n]$ 的反褶序列或反转序列，表示为 $x(-n)$ 。

【例 1-5】 计算如图 1-2 所示的序列 $x(n]$ 的反褶序列 $x(-n)$ 。

解：

$$x(-n) = \begin{cases} 1 & n = -4 \\ 0 & n = -3 \\ -1 & n = -2 \\ 2 & n = -1 \\ 1 & n = 0 \\ 1 & n = 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

波形如图 1-7 所示。

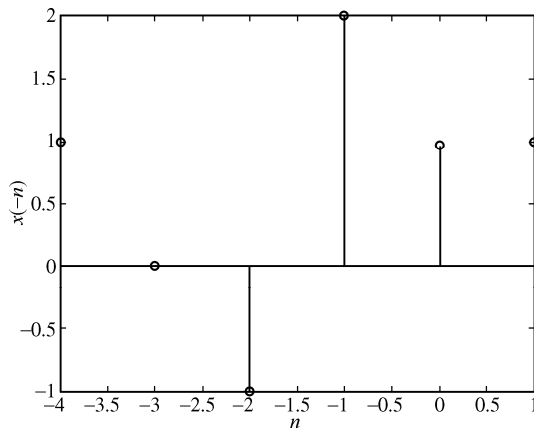


图 1-7 序列的反褶（反转）

要点六：序列 $x(n]$ 的反褶（反转）序列 $x(-n)$ 是以 $n=0$ 为纵对称轴对 $x(n)$ 进行反褶得到的序列。

6. 差分

前向差分

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n) \quad (1-5)$$

后向差分

$$\nabla x(n) = x(n) - x(n-1) \quad (1-6)$$

由定义式可得出

$$\nabla x(n) = \Delta x(n-1) \quad (1-7)$$

离散信号的差分运算与连续信号的微分运算相对应，如连续信号 $\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$ ；离散信号单位冲激序列可以由单位阶跃序列的差分运算得到，即 $\delta(n) = u(n) - u(n-1)$ 。

【例 1-6】 计算如图 1-2 所示的序列 $x(n]$ 的前向差分 $\Delta x(n)$ 和后向差分 $\nabla x(n)$ 。

解：

$$\Delta x(n) = \begin{cases} 1 & n = -2 \\ 0 & n = -1 \\ 1 & n = 0 \\ -3 & n = 1 \\ 1 & n = 2 \\ 1 & n = 3 \\ -1 & n = 4 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad \nabla x(n) = \begin{cases} 1 & n = -1 \\ 0 & n = 0 \\ 1 & n = 1 \\ -3 & n = 2 \\ 1 & n = 3 \\ 1 & n = 4 \\ -1 & n = 5 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

波形如图 1-8 所示。

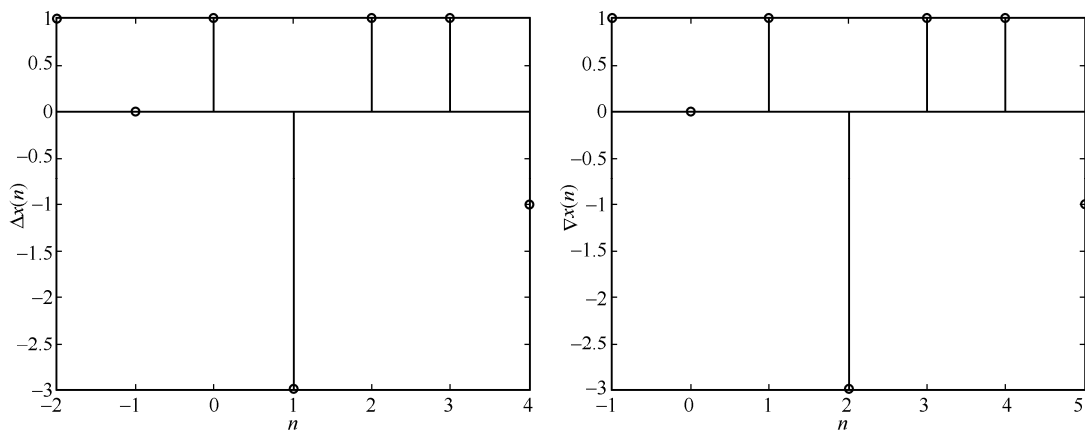


图 1-8 序列的差分

要点七：序列 $x(n]$ 的前向差分为其超前序列 $x(n+1)$ 与原序列的差序列；序列 $x(n]$ 的后向差分为该序列与其延序列 $x(n-1)$ 的差序列。

7. 尺度变换（抽取和插值）

序列 $x(n]$ 的尺度变换包括抽取和插值两种运算，分别对应于序列波形的压缩和扩展。

抽取是将序列 $x(n]$ 的自变量 n 换成 nm ($m \geq 2$, 为正整数)，得到一个新序列 $x(mn)$ 的变换。 $x(mn)$

是对 $x(n)$ 以 $n=0$ 为起点, 分别向左、向右每隔 $m-1$ 个点抽取一个点得到的。如果 $x(n)$ 是对连续时间信号 $x_a(t)$ 以抽样周期 T 的抽样, 则 $x(mn)$ 就相当于对 $x_a(t)$ 以抽样周期 mT 的抽样, 即

$$x(n) = x_a(t) \Big|_{t=nT} \quad (1-8)$$

$$x(mn) = x_a(t) \Big|_{t=mnT} \quad (1-9)$$

例如, 若序列 $x(n)$ 的波形如图 1-9 (a) 所示, 则序列 $x(2n)$ 是对序列 $x(n)$ 以 $n=0$ 为起点, 分别向左、向右每隔 1 个点抽取一个点得到的; 序列 $x(3n)$ 是对序列 $x(n)$ 以 $n=0$ 为起点, 分别向左、向右每隔 2 个点抽取一个点得到的。序列 $x(2n)$ 的波形如图 1-9 (b) 所示, 序列 $x(3n)$ 的波形如图 1-9 (c) 所示。

插值是将序列 $x(n)$ 的自变量 n 换成 n/m ($m \geq 2$, 为正整数) 得到一个新序列 $x(n/m)$ 的变换。插值可以视为抽取的反过程, $x(n/m)$ 是在 $x(n)$ 的相邻序列值之间插入 $m-1$ 个“0”得到的, 相当于对 $x_a(t)$ 以抽样周期 T/m 进行抽样, 即

$$x(mn) = x_a(t) \Big|_{t=nT/m} \quad (1-10)$$

例如, 如图 1-9 (a) 所示的序列 $x(n)$ 的插值序列 $x(n/2)$ 如图 1-10 所示。

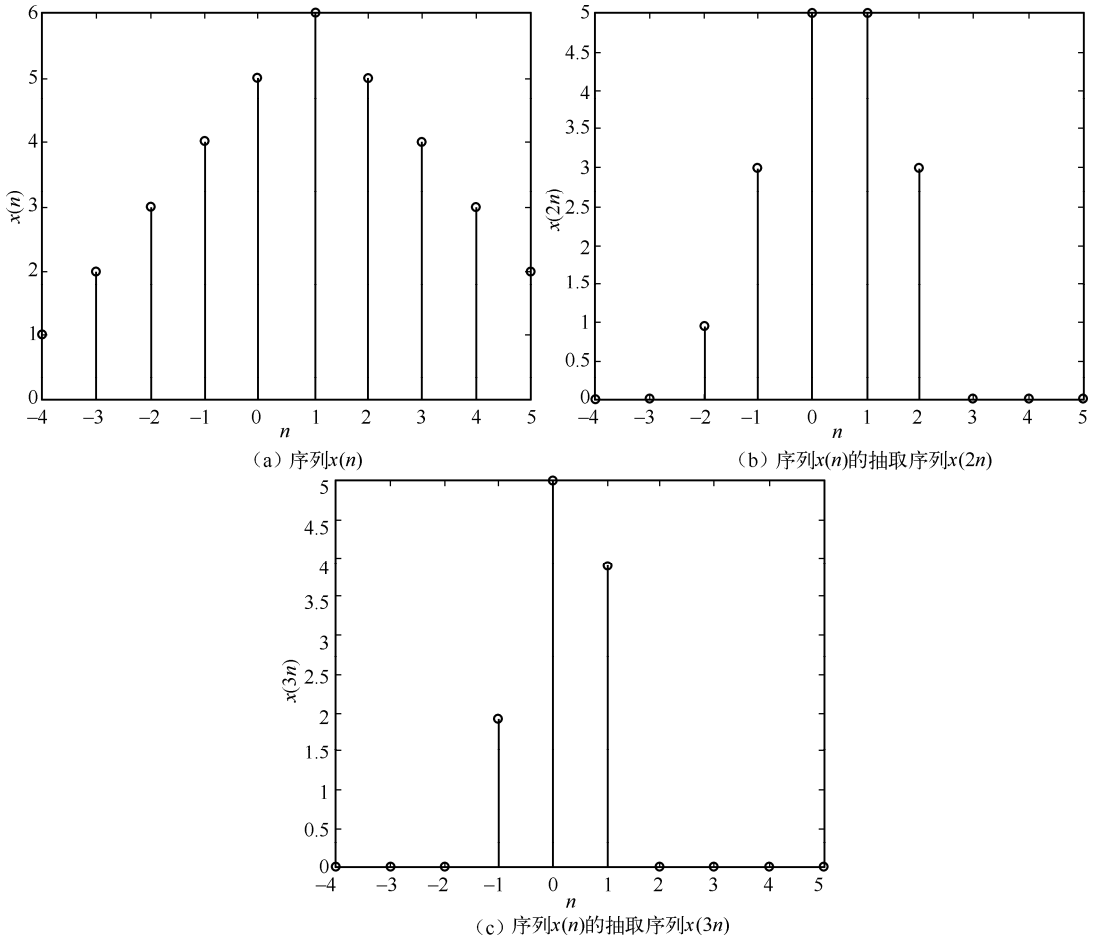
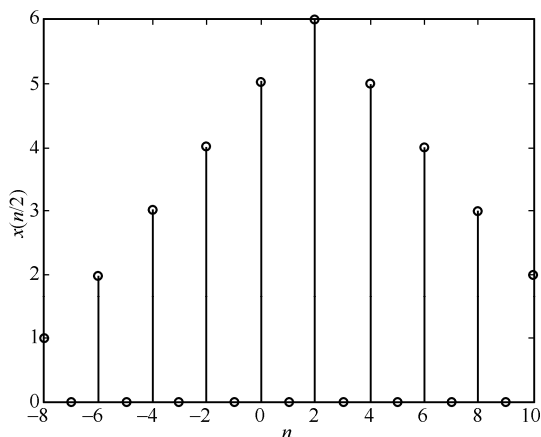


图 1-9 序列抽取实例

要点八: 序列 $x(n)$ 的抽取序列 $x(mn)$ 是对序列 $x(n)$ 以 $n=0$ 为起点, 分别向左、向右每隔 $m-1$ 个点抽取一个点得到的序列 ($m \geq 2$, 为正整数)。插值可以视为抽取的反过程, $x(n/m)$ 是在 $x(n)$ 的相邻序列值之间插入 $m-1$ 个“0”得到的序列。

图 1-10 序列插值序列 $x(n/2)$

8. 卷积和

序列 $x(n]$ 和序列 $y(n]$ 的卷积和定义为

$$z(n) = x(n) * y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)y(n-m) \quad (1-11)$$

式中，“*”表示卷积和运算。

类似于时域连续线性移不变系统输出响应（零状态响应）的卷积积分求解方法，卷积和是求解时域离散线性移不变系统输出响应（零状态响应）的主要方法。

卷积和的求解方法有图解法、对角线列表法、相乘对位相加法、解析法等多种求解方法。这里选择几种比较简便的求解方法进行介绍。

(1) 图解法

根据卷积和定义式，卷积和运算可以采用图解法计算，通过以下步骤完成。

第一步，变量代换，将自变量 n 变为 m ，得到 $x(m)$ 和 $y(m)$ 。

第二步，反褶，将 $y(m)$ 反褶，得到 $y(-m)$ （其中两个序列任意一个均可反褶，一般选简单者）。

第三步，每移一位，给定一个 n 值，将 $y(-m)$ 移位得到 $y(n-m)$ ， $\begin{cases} n > 0 & \text{向右平移} \\ n < 0 & \text{向左平移} \end{cases}$ 。

第四步，取 n 的初值为 $-\infty$ ，逐渐增大 n 值，向右移动序列 $y(n-m)$ ，使不动序列 $x(m)$ 的最左边值和移动序列 $y(n-m)$ 的最右边值对齐。

第五步，将 $x(m)$ 与 $y(n-m)$ 的对应序列值相乘，并将相乘产生的全部结果值相加，取得的结果作为序列 $z(n)$ 的当前值。

第六步，将 n 值增加 1，向右平移 $y(n-m)$ ，并重复第五步。

第七步，重复第六步，直到不动序列的最右边值和移动序列的最左边值对齐，便产生序列 $z(n)$ 的全部序列值。此时，产生的序列 $z(n)$ 即为序列 $x(n)$ 和序列 $y(n)$ 的卷积和。

卷积和 $z(n)$ 序列的长度为 $L = M + N - 1$ ，其中， M 、 N 分别为 $x(m)$ 和 $y(m)$ 的序列长度。

【例 1-7】 用图解法求下列两个序列的卷积和。

$$x(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 3 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad y(n) = \begin{cases} 2^{-n} & -1 \leq n \leq 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

解：由定义可知，卷积和为

$$z(n) = x(n) * y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)y(n-m)$$

图解过程和结果如图 1-11 所示。

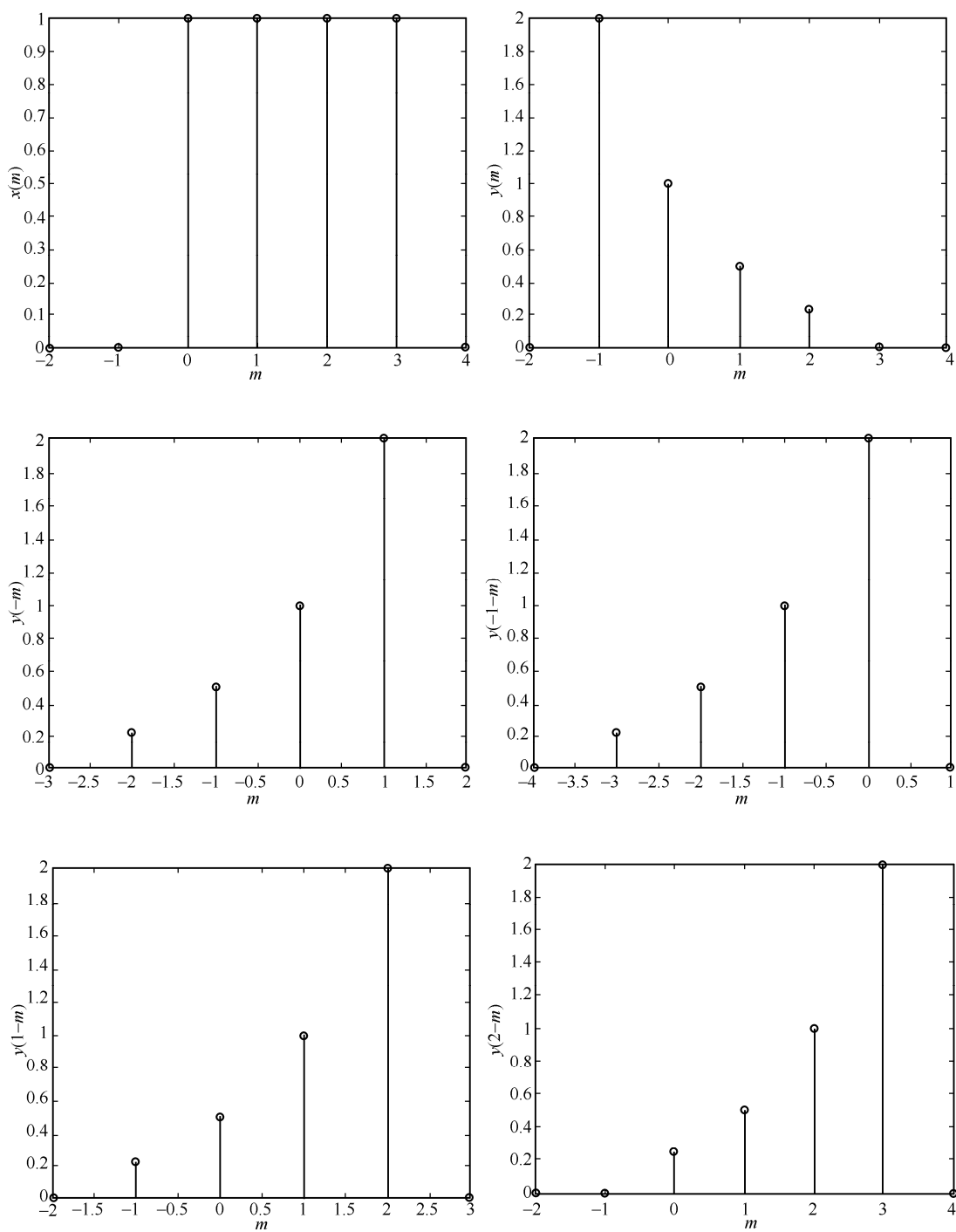


图 1-11 图解法求卷积和

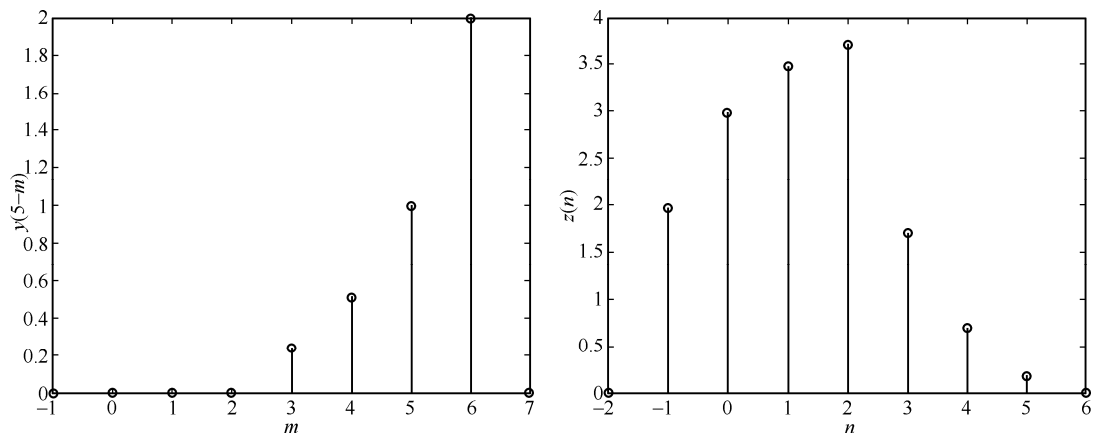


图 1-11 图解法求卷积和 (续)

将 $x(n)$ 和 $y(n)$ 表示为 $x(m)$ 和 $y(m)$, 并将 $y(m)$ 反褶成序列 $y(-m)$ 。 $y(-m)$ 的移位序列 $y(n-m)$ 和 $x(m)$ 对应序列值对位相乘之后相加得到的结果就是卷积和 $z(n)$ 的值, 可以分为以下三个区间。

① 当 $n < -1$ 时, 移位序列 $y(n-m)$ 与 $x(m)$ 的非零值没有重叠部分, $z(n)$ 为 0。

② 当 $-1 \leq n \leq 5$ 时, 移位序列 $y(n-m)$ 与 $x(m)$ 的非零值部分重叠或全部重叠, 此时卷积和为两个序列的对应序列值相乘之后求和的结果。

例如, $z(-1) = x(m)y(-1-m) = 1 \times 2 = 2$, 这时 $x(m)$ 最左边序列值与 $y(-1-m)$ 最右边序列值刚好对齐, 波形如图 1-11 中的 $x(m)$ 与 $y(-1-m)$ 。此时, 卷积开始, 结果 $z(-1) = 1 \times 2 = 2$ 。

接着, 将 $y(-1-m)$ 右移一位, 为 $y(0-m)$, 对应波形为图 1-11 中的 $y(-m)$, 与 $x(m)$ 相乘、求和得到卷积和序列的下一个序列值为

$$z(0) = \sum_{m=0}^1 x(m)y(0-m) = 1 \times 1 + 1 \times 2 = 3$$

同理, 每右移一位, 就进行对应序列值相乘、求和, 得到一个对应的卷积和序列值, 直到 $n = 5$ 时序列 $y(n-m)$ 的最左边序列值正好与序列 $x(m)$ 的最右边序列值对齐。此时 $y(n-m)$ 对应图 1-11 中 $y(5-m)$, 计算得到 $-1 \leq n \leq 5$ 区间内序列 $z(n)$ 的值, 即卷积和。序列 $z(n)$ 波形如图 1-11 中的 $z(n)$ 波形所示。

卷积和结果为

$$z(n) = \{2, 3, 7/2, 15/4, 7/4, 3/4, 1/4\}$$

↑

③ 当 $n > 5$ 时, 移位序列 $y(n-m)$ 与 $x(m)$ 的非零值没有重叠部分, 卷积结束。

综上所述可得:

$$z(n) = \begin{cases} 2 & n = -1 \\ 3 & n = 0 \\ 7/2 & n = 1 \\ 15/4 & n = 2 \\ 7/4 & n = 3 \\ 3/4 & n = 4 \\ 1/4 & n = 5 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

(2) 对角线列表法

根据卷积和定义

$$z(n) = x(n) * y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)y(n-m)$$

可以将序列 $x(n)$ 和序列 $y(n)$ 表示为

$$x(n) = \{x_1(n), x_2(n), x_3(n), \dots\}$$

$$y(n) = \{y_1(n), y_2(n), y_3(n), \dots\}$$

通过以下步骤求得序列 $x(n)$ 和序列 $y(n)$ 的卷积和。

第一步, 以 $x_1(n), x_2(n), x_3(n), \dots$ 为行标题, 以 $y_1(n), y_2(n), y_3(n), \dots$ 为列标题, 列出如图 1-12 所示的表格, 将序列 $x(n)$ 的每个序列值和序列 $y(n)$ 的每个序列值分别相乘, 并将结果填入表中。

第二步, 在表中画出如图 1-12 所示的对角线。

第三步, 将对角线上的元素相加, 得到

$$z(n) = \{x_1(n)y_1(n), [x_1(n)y_2(n) + x_2(n)y_1(n)], [x_1(n)y_3(n) + x_2(n)y_2(n) + x_3(n)y_1(n)], \dots\}$$

由于卷积具有可交换卷积顺序的性质, 参加卷积运算的两个序列的顺序是可以交换的。即可以选择任意一个序列作为行标题, 将另外一个序列作为列标题。

	$y_1(n)$	$y_2(n)$	$y_3(n)$
$x_1(n)$	$x_1(n)y_1(n)$	$x_1(n)y_2(n)$	$x_1(n)y_3(n)$
$x_2(n)$	$x_2(n)y_1(n)$	$x_2(n)y_2(n)$	$x_2(n)y_3(n)$
$x_3(n)$	$x_3(n)y_1(n)$	$x_3(n)y_2(n)$	$x_3(n)y_3(n)$

图 1-12 对角线列表法卷积图

【例 1-8】 已知 $x(n) = \{1, 2, 3\}$, $y(n) = \{1, 1, 1\}$, 用对角线列表法求序列 $x(n)$ 和序列 $y(n)$ 的卷积和。

解: 卷积和如图 1-13 所示。

$$x(n) * y(n) = \{1, 1+2, 1+2+3, 2+3, 3\} = \{1, 3, 6, 5, 3\}$$

(3) 相乘对位相加法

相乘对位相加法的计算过程类似于竖式乘法, 通过例 1-9 说明其求解步骤。

【例 1-9】 用相乘对位相加法, 求解例 1-7 中序列 $x(n)$ 和序列 $y(n)$ 的卷积和。

解: 相乘对位相加法只适合于两个有限长序列的卷积和。

如图 1-14 所示, 将两个序列的序列值分两行排列, 逐位竖式相乘得到 4 行; 从左到右将乘积各项按竖式对位相加, 结果就是卷积和。

由例 1-9 可以看出, 序列 $x(n)$ 的非零值区间为 $0 \leq n \leq 3$, 长度为 4; 序列 $y(n)$ 的非零值区间为 $-1 \leq n \leq 2$, 长度为 4; 卷积和 $z(n) = x(n) * y(n)$ 的非零值区间为 7, 等于两个卷积因子序列长度之和减 1。事实上, 若序列 $x(n)$ 的非零区间为 $n_1 \leq n \leq n_2$, 长度 $N_1 = n_2 - n_1 + 1$; 序列 $y(n)$ 的非零值区间为 $n_3 \leq n \leq n_4$, 长度 $N_2 = n_4 - n_3 + 1$; 则卷积和 $z(n) = x(n) * y(n)$ 的非零值区间为 $n_1 + n_3 \leq n \leq$

		$x(n)$		
		1	2	3
$y(n)$	1	1	2	3
	1	1	2	3
	1	1	2	3

图 1-13 对角线列表法卷积和实例图


```
n=nx(1)+ny(1):nx(end)+ny(end);卷积和区间范围计算
stem(n,z);
xlabel('n');ylabel('z');
```

程序运行的结果如图 1-16 所示。

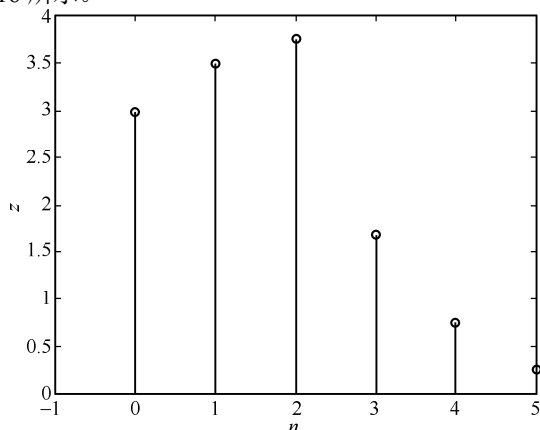


图 1-16 例 1-10 序列卷积和计算结果

1.2.3 序列的能量、周期性及常用典型序列

1. 序列的能量

序列 $x(n]$ 的能量 E 定义为序列各抽样值的平方和

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \quad (1-12)$$

2. 序列的周期性

如果存在正整数 N , 使序列 $x(n]$ 对所有的 n 满足

$$x(n) = x(n + N) \quad (1-13)$$

则称 $x(n]$ 为周期性序列, 使序列满足周期性的最小的正整数 N 称为序列 $x(n]$ 的周期。

3. 常用典型序列

(1) 单位抽样序列 (单位冲激序列) $\delta(n]$

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad (1-14)$$

单位抽样序列类似于时域连续信号中的单位冲激函数 $\delta(t]$, 但是 $\delta(n]$ 的定义是在 $n = 0$ 处有确定取值的, 而 $\delta(t]$ 是具有极限概念的信号。 $\delta(n]$ 在时域离散信号与系统中的作用等同于 $\delta(t]$ 在时域连续信号与系统中的作用, 但是计算要容易得多。单位抽样序列如图 1-17 所示。

要点十: 单位抽样序列

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

(2) 单位阶跃序列 $u(n]$

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad (1-15)$$

$u(n]$ 类似于连续时间信号中的单位阶跃函数 $u(t]$, 所不同的是, $u(t]$ 在 $t = 0$ 处没有确定值, 而 $u(n]$ 在 $n = 0$ 处定义为 1。

分析 $\delta(n)$ 与 $u(n)$ 的定义, 可以得出两者的关系, $\delta(n)$ 是 $u(n)$ 的后向差分 $\nabla u(n)$, 如下

$$\delta(n) = \nabla u(n) = u(n) - u(n-1) \quad (1-16)$$

如果将 $\delta(n)$ 移位以后再累加, 就可以得到 $u(n)$, $u(n)$ 是 $\delta(n)$ 的移位累加和, 如下

$$u(n) = \sum_{m=0}^{\infty} \delta(n-m) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \cdots \quad (1-17)$$

令 $n-m=k$, 得

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^n \delta(k) \quad (1-18)$$

单位阶跃序列如图 1-18 所示。

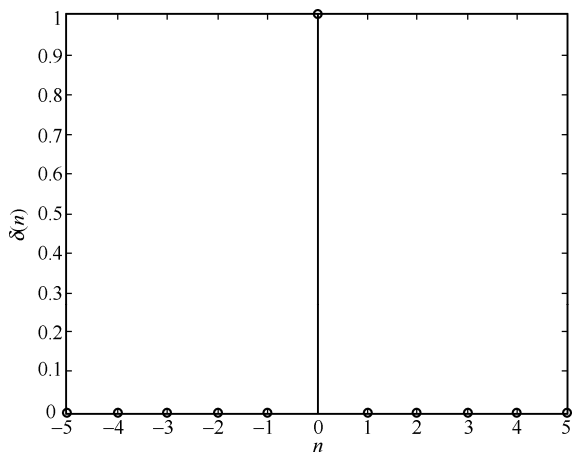


图 1-17 单位抽样序列

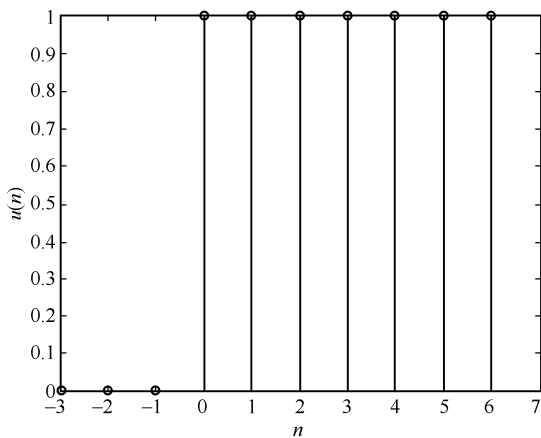


图 1-18 单位阶跃序列

要点十一：单位阶跃序列

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

要点十二：单位抽样序列与单位阶跃序列的关系：

$$\textcircled{1} \quad \delta(n) = \nabla u(n) = u(n) - u(n-1)$$

$$\textcircled{2} \quad u(n) = \sum_{m=0}^{\infty} \delta(n-m) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \cdots$$

(3) 矩形序列

矩形序列常用来进行长序列的截断处理。矩形序列的定义为

$$R_N(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (1-19)$$

称 N 为矩形序列的长度。如序列

$$R_4(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 3 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

为矩形序列, 波形如图 1-19 所示。

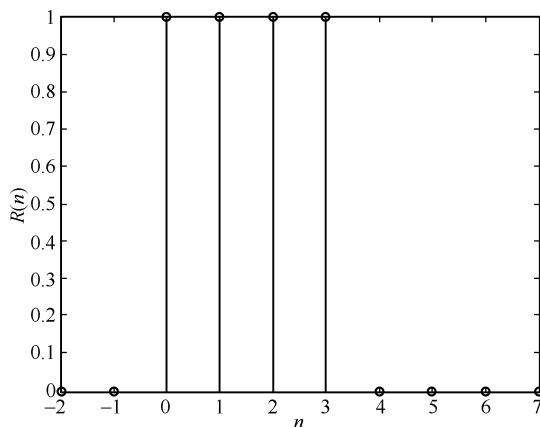


图 1-19 矩形序列实例

$R_N(n)$ 可以用 $u(n)$ 表示, 也可以用 $\delta(n)$ 表示。 $R_N(n)$ 与 $u(n)$ 的关系如式 (1-20) 所示, $R_N(n)$ 与 $\delta(n)$ 的关系如式 (1-21) 所示。

$$R_N(n) = u(n) - u(n - N) \quad (1-20)$$

$$R_N(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \delta(n - m) \quad (1-21)$$

要点十三: 矩形序列

$$R_N(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

要点十四: 矩形序列与单位抽样序列的关系

$$R_N(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \delta(n - m)$$

要点十五: 矩形序列与单位阶跃序列的关系

$$R_N(n) = u(n) - u(n - N)$$

(4) 单边实指数序列

单边实指数序列的定义为

$$x(n) = a^n u(n) \quad (1-22)$$

式中, a 为实数。当 $|a| < 1$ 时, 序列 $x(n)$ 是收敛的; 当 $|a| > 1$ 时, 序列 $x(n)$ 是发散的。单边实指数序列如图 1-20 所示, 图 1-20 (a) 所示为 $a > 1$ 的单边实指数序列 $x(n)$, 图 1-20 (b) 所示为 $0 < a < 1$ 的单边实指数序列 $x(n)$, 图 1-20 (c) 所示为 $a < -1$ 的单边实指数序列 $x(n)$, 图 1-20 (d) 所示为 $-1 < a < 0$ 的单边实指数序列 $x(n)$ 。其中图 1-20 (a) 和图 1-20 (c) 为 $|a| > 1$ 的情况, 序列 $x(n)$ 是发散的; 图 1-20 (b) 和图 1-20 (d) 为 $|a| < 1$ 的情况, 序列 $x(n)$ 是收敛的。

(5) 复指数序列

复指数序列的定义为

$$x(n) = e^{(\sigma + j\omega_0)n} \quad (1-23)$$

式中, ω_0 称为数字角频率。复指数序列可以表示为实部与虚部

$$x(n) = e^{(\sigma + j\omega_0)n} = e^{\sigma n} (\cos \omega_0 n + j \sin \omega_0 n) = e^{\sigma n} \cos \omega_0 n + j e^{\sigma n} \sin \omega_0 n$$

复指数序列还可以表示为模与相角

$$x(n) = e^{(\sigma + j\omega_0)n} = |x(n)| e^{j \arg[x(n)]} = e^{\sigma n} \cdot e^{j\omega_0 n}$$

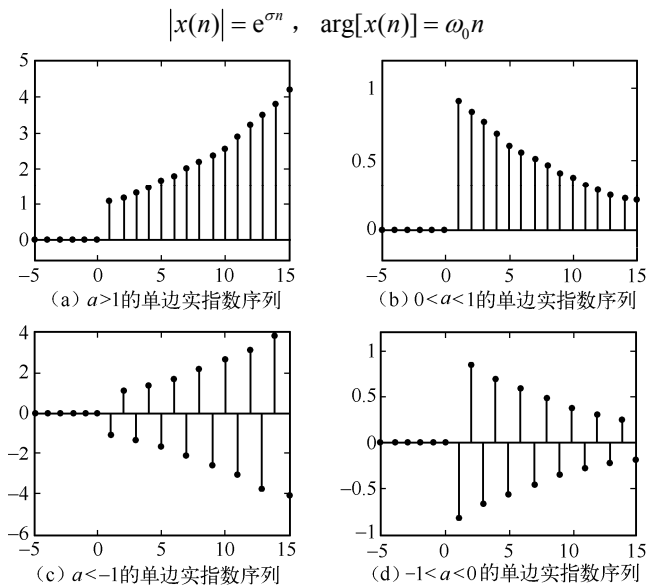


图 1-20 单边实指数序列

特别地, 当 $\sigma = 0$ 时, $x(n) = e^{j\omega_0 n}$ 。此时, $|x(n)| = 1$, $x(n) = \cos \omega_0 n + j \sin \omega_0 n$ 。可见, 复指数序列的实部和虚部是正弦序列, 因此, 复指数序列与正弦序列的特性相同。例如, 复指数序列 $e^{j\omega_0 n}$ 的周期性正弦序列的周期性有同样的分析结果。

(6) 正弦序列

正弦序列的定义为

$$x(n) = A \sin(\omega_0 n + \varphi) \quad (1-24)$$

式中, A 为幅度, ω_0 为数字角频率, φ 为初始相位。

4. 正弦序列的周期性

正弦序列是由模拟正弦信号抽样得到的, 正弦序列的周期性同样满足序列周期性的定义。对于序列

$$x(n) = A \sin(\omega_0 n + \varphi) \quad (1-25)$$

假设存在 N , 使得

$$x(n) = x(n + N) \quad (1-26)$$

成立, 则正弦序列为周期序列。

因为

$$x(n + N) = A \sin[(n + N)\omega_0 + \varphi] = A \sin[N\omega_0 + n\omega_0 + \varphi]$$

若

$$N\omega_0 = 2k\pi \quad (k \text{ 为整数})$$

则

$$x(n) = x(n + N)$$

即要求 $N = \frac{2\pi k}{\omega_0}$ (N, k 必须为整数), k 的取值保证 N 是正整数且取值最小。可分如下几种情况讨论。

(1) 当 $2\pi / \omega_0$ 为整数时, 只要 $k = 1$, $N = 2\pi / \omega_0$ 就为最小正整数, $x(n)$ 即是周期为 $2\pi / \omega_0$ 的周期序列。

例如: $x(n) = \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)$, $\omega_0 = \frac{\pi}{4}$, $2\pi/\omega_0 = 8$ 。

当 $k=1$ 时, $N = \frac{2\pi k}{\omega_0} = 8$ 即为最小周期。

(2) 当 $2\pi/\omega_0$ 为有理数时, 表示为分数 $\frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{P}{Q}$, 其中 P 与 Q 为互素的整数, $N = \frac{2\pi k}{\omega_0} = \frac{P}{Q} \cdot k$,

取 $k=Q$, 则 $N=P$, $x(n)$ 即是周期为 P 的周期序列。

例如: $x(n) = \sin\left(\frac{4\pi}{5}n\right)$, $\omega_0 = \frac{4\pi}{5}$, $2\pi/\omega_0 = \frac{5}{2}$, 取 $k=2$, 该序列是周期为 5 的周期序列。

(3) 当 $2\pi/\omega_0$ 为无理数时, 则任何 k 值都不能使 N 为正整数, $x(n)$ 不是周期性的。这和连续信号是不一样的。

例如: $x(n) = \sin\left(\frac{1}{4}n\right)$, $\omega_0 = \frac{1}{4}$, $2\pi/\omega_0 = 8\pi$, 该序列不是周期序列。

指数为虚数的复指数序列的周期性与正弦序列的情况相同。无论是否具有周期性, 正弦序列和复指数序列的参数 ω_0 都称为数字角频率。

要点十六: 正弦序列 $x(n) = A \sin(\omega_0 n)$ 的周期性判断如下:

- (1) 当 $2\pi/\omega_0$ 为整数时, $x(n)$ 为 $N = 2\pi/\omega_0$ 的周期序列;
- (2) 当 $2\pi/\omega_0$ 为有理数时, $x(n)$ 为 $N = M(2\pi/\omega_0)$ 的周期序列, M 取使 N 为整数的最小整数;
- (3) 当 $2\pi/\omega_0$ 为无理数时, $x(n)$ 为非周期离散信号。

【例 1-11】 判断下面的序列是否是周期序列。若是周期序列, 确定其周期。

$$(1) x(n) = \cos\left(\frac{\pi}{5}n - \frac{\pi}{3}\right); \quad (2) x(n) = e^{j\left(\frac{n}{3} - \pi\right)}; \quad (3) x(n) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{5}n\right)。$$

解: (1) $\omega_0 = \frac{\pi}{5}$, $\frac{2\pi}{\omega_0} = 10$ 为有理数, 所以 $x(n)$ 是周期序列, 周期为 10。

(2) $\omega_0 = \frac{1}{3}$, $\frac{2\pi}{\omega_0} = 6\pi$ 为无理数, 所以 $x(n)$ 是非周期序列。

(3) $x(n)$ 为两项三角函数之和, 其中第一项为 $\cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right)$, $\omega_1 = \frac{2\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{\omega_1} = 3$, 周期为 3; 第二项为 $\sin\left(\frac{3\pi}{5}n\right)$, $\omega_2 = \frac{3\pi}{5}$, $\frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{10}{3}$, 周期为 10。两个组成项都是周期序列, 所以 $x(n)$ 是周期序列, $x(n)$ 的周期是这两项的周期的最小公倍数, 即 $x(n)$ 的周期为 30。

5. 任意序列用单位脉冲序列表示方式

任意序列常表示为单位脉冲序列的移位加权, 如序列

$$x(n) = \begin{cases} 1 & n = -1 \\ 1 & n = 0 \\ 2 & n = 1 \\ -1 & n = 2 \\ 0 & n = 3 \\ 1 & n = 4 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

可以表示为

$$\begin{aligned} x(n) &= x(-1)\delta(n+1) + x(0)\delta(n) + x(1)\delta(n-1) + x(2)\delta(n-2) + x(3)\delta(n-3) + x(4)\delta(n-4) \\ &= \delta(n+1) + \delta(n) + 2\delta(n-1) - \delta(n-2) + \delta(n-4) \end{aligned}$$

【例 1-12】 已知序列

$$x(n) = \begin{cases} 2n+4 & -2 \leq n \leq 2 \\ 5 & 3 \leq n \leq 5 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

用 $\delta(n)$ 及相应的延迟表示 $x(n)$ 。

解：根据已知序列 $x(n)$ 的表达式，计算得到各点序列值为

$$x(-2) = 0; \quad x(-1) = 2; \quad x(0) = 4; \quad x(1) = 6; \quad x(2) = 8; \quad x(3) = 5; \quad x(4) = 5; \quad x(5) = 5$$

可以写出 $\delta(n)$ 及相应的延迟表示的 $x(n)$ 为

$$x(n) = 2\delta(n+1) + 4\delta(n) + 6\delta(n-1) + 8\delta(n-2) + 5\delta(n-3) + 5\delta(n-4) + 5\delta(n-5)$$

一般情况下，任意序列表示为单位脉冲序列的移位加权求和的表达式为

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m) = \cdots + x(-1)\delta(n+1) + x(0)\delta(n) + x(1)\delta(n-1) + x(2)\delta(n-2) + \cdots$$

式中， $x(m)$ 可以视为单位脉冲序列的移位序列 $\delta(n-m)$ 的权值。

可以看出，任意序列的单位脉冲序列表示式正好符合卷积的定义。因此，任意序列也可以表示为与单位脉冲序列的卷积和的形式，即

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m) = x(n) * \delta(n) \quad (1-27)$$

从而可以得出：任意序列与单位脉冲序列的卷积和等于它自身。这个结论在时域离散信号与系统分析中具有重要的意义。

要点十七：任意序列与单位脉冲序列的卷积和等于它自身，即任意序列可以表示为单位脉冲序列的移位加权求和。

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m) = x(n) * \delta(n)$$

【例 1-13】 利用 MATLAB 计算单位脉冲序列 $\delta(n-1)$ 在 $-3 \leq n \leq 3$ 范围内各点的取值。

解：编写如下程序，计算函数取值。

```
ks=-3;ke=3;n=1;
k=[ks:ke];
x=(k-n)==0;令 n 不等于 1 时的所有 x 值为零，n 等于 1 时 x 值为 1
stem(k,x);xlabel('k');
```

程序运行结果如图 1-21 所示。

1.3 时域离散系统

时域离散系统是将输入序列 $x(n)$ 变换成输出序列 $y(n)$ 的一种运算。时域离散系统是一个数学算子，表示输入序列到输出序列的映射，即通过运算把一个输入序列变换成输出序列。一个时域离散系统表示为 $T[\cdot]$ ，输入序列 $x(n)$ 通过时域离散系统变换成输出序列 $y(n)$ ，可以用如下关系式表示

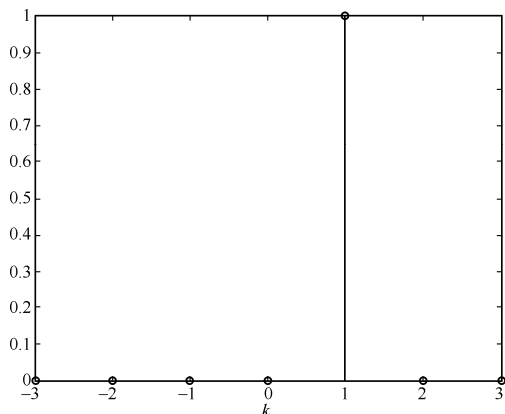


图 1-21 单位脉冲序列 $\delta(n-1)$

$$y(n) = T[x(n)] \quad (1-28)$$

时域离散系统模型如图 1-22 所示。时域离散系统可以用模拟框图的形式描述。类似于时域连续系统，时域离散系统的模拟框图由加法器、乘法器和单位延迟器三个基本单元构成。加法器表示加法运算；乘法器表示乘法运算；单位延迟器表示将输入序列延迟一个单位时间。模拟框图的基本单元如图 1-23 所示。

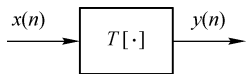


图 1-22 时域离散系统模型

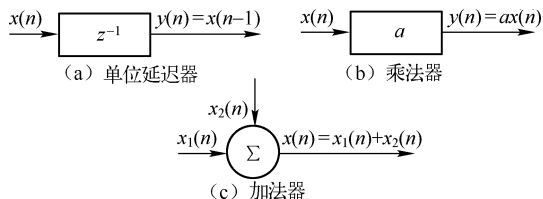


图 1-23 时域离散系统模拟框图的基本单元

1.3.1 线性系统

满足叠加原理的系统称为线性系统。实质上就是指，系统对多个输入信号同时输入系统的响应，等于多个信号分别输入系统所产生的各个响应之和；若输入信号加权，输出信号也对应加权。实际上包含两个方面：比例性（也称为齐次性）与可加性。同时满足这两个性质的时域离散系统称为线性时域离散系统。

(1) 比例性（齐次性）

当系统的输入增加为原来的 a 倍时，若系统的输出也增加为原来的 a 倍（ a 为任意常数），则称系统具有比例性。即，若系统满足

$$T[x(n)] = y(n)$$

则

$$T[ax(n)] = aT[x(n)] = ay(n)$$

(2) 可加性

当有几个输入同时作用于系统时，若系统的输出等效于每一个输入单独作用于该系统所产生输出的累加，则称系统具有可加性。即

若

$$T[x_1(n)] = y_1(n), \quad T[x_2(n)] = y_2(n)$$

则

$$T[x_1(n) + x_2(n)] = T[x_1(n)] + T[x_2(n)] = y_1(n) + y_2(n)$$

线性系统同时具有比例性和可加性。设有激励 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ ，加权后同时作用于同一线性系统，系统的输入与输出表示为

$$T[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = T[a_1x_1(n)] + T[a_2x_2(n)] = a_1y_1(n) + a_2y_2(n) \quad (1-29)$$

式中， a_1 与 a_2 均为任意常数。

线性系统有 N 个输入的一般表达式为

$$\sum_{i=1}^N a_i y_i(n) = T \left[\sum_{i=1}^N a_i x_i(n) \right] \quad (1-30)$$

因此，对于线性系统，当系统输入为零时，其输出也为零，即零输入产生零输出。若要证明一个系统是线性系统，则必须证明该系统同时满足可加性和比例性。如果一个系统不满足其中任意一个性质，则可证明该系统不是线性系统。

【例 1-14】 试判断 $y(n) = x(n) \sin\left(\frac{2\pi}{9}n + \frac{\pi}{7}\right)$ 是否为线性系统。

解：设

$$y_1(n) = T[x_1(n)] = x_1(n) \sin\left(\frac{2\pi}{9}n + \frac{\pi}{7}\right)$$

$$y_2(n) = T[x_2(n)] = x_2(n) \sin\left(\frac{2\pi}{9}n + \frac{\pi}{7}\right)$$

则

$$\begin{aligned} T[x_1(n) + x_2(n)] &= [x_1(n) + x_2(n)] \sin\left(\frac{2\pi}{9}n + \frac{\pi}{7}\right) \\ &= x_1(n) \sin\left(\frac{2\pi}{9}n + \frac{\pi}{7}\right) + x_2(n) \sin\left(\frac{2\pi}{9}n + \frac{\pi}{7}\right) \\ &= y_1(n) + y_2(n) \end{aligned}$$

满足可加性。

$$T[ax_1(n)] = ax_1(n) \sin\left(\frac{2\pi}{9}n + \frac{\pi}{7}\right) = ay_1(n) \quad (a \text{ 为常数})$$

满足比例性。

同时满足可加性、比例性，所以该系统是线性系统。

【例 1-15】 判断系统 $y(n) = ax(n) + b$ 是否为线性系统。

解：将 $x_1(n)$ 、 $x_2(n)$ 分别输入系统，产生的输出分别为

$$y_1(n) = T[x_1(n)] = ax_1(n) + b$$

$$y_2(n) = T[x_2(n)] = ax_2(n) + b$$

当两个信号同时作用于系统时，产生的输出

$$T[x_1(n) + x_2(n)] = a[x_1(n) + x_2(n)] + b \neq y_1(n) + y_2(n)$$

不满足可加性，所以该系统为非线性系统。

1.3.2 移不变系统

如果系统输入与输出的运算关系不随时间的变化而改变，则这样的系统称为移不变系统，即系统的响应与激励施加于系统的时刻无关。系统输入与输出的运算关系不随时间变化而变化的性质在连续系统中称为时不变特性，具有时不变性质的连续系统称为时不变系统；系统输入与输出的运算关系不随时间变化而变化的性质在离散系统中称为移不变特性，具有移不变性质的离散系统称为移不变系统。

对于移不变系统，若

$$T[x(n)] = y(n)$$

则满足

$$T[x(n-m)] = y(n-m) \quad (1-31)$$

式中， m 为任意整数。

即如果输入序列移动任意位，其输出序列也移动同样的位数，并且其幅值保持不变。在实际应用中，如果一个系统的性质或特征不随时间变化，则该系统就是移不变系统。若系统有一个移变的增益，则此系统一定是移变系统。判断一个系统是不是移不变系统，可以看其是否满足式 (1-31)。

【例 1-16】 证明 $y(n) = 5x(n) + 6$ 是移不变系统。

证明：使延时的输入信号作用于系统

$$T[x(n-m)] = 5x(n-m) + 6$$

将原输出信号延时同样的时间

$$y(n-m) = 5x(n-m) + 6$$

两者结果相等，所以该系统是移不变系统。

1.3.3 线性移不变系统

1. 线性移不变系统输入与输出之间的关系

同时具有线性和移不变性的时域离散系统称为线性移不变时域离散系统（LSI, Linear Shift Invariant）。当输入序列为 $\delta(n)$ 时，线性移不变系统的响应称为单位脉冲响应 $h(n)$ ，即

$$T[\delta(n)] = h(n) \quad (1-32)$$

设一个线性移不变系统的输入信号为 $x(n]$ ，输出信号为 $y(n)$ ，根据 1.2.3 节的结论，输入信号可以表示为单位冲激序列的移位加权，即

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m) \quad (1-33)$$

根据系统的线性和移不变性，可得出系统的输出为系统单位脉冲响应的移位加权，推导如下：

$$y(n) = T\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)\right] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)T[\delta(n-m)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) \quad (1-34)$$

也就是说，输出信号 $y(n)$ 为输入信号 $x(n)$ 和单位脉冲响应 $h(n)$ 的卷积和。时域离散系统的数学模型如图 1-24 所示。

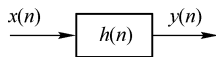


图 1-24 时域离散系统的数学模型

2. 线性移不变系统的性质

线性移不变系统可以以一定的方式组合，并满足交换律、结合律和分配律。图 1-25 是对这些性质的说明。

1) 交换律

交换律表达的意思就是输出的结果与输入序列的次序无关，即交换 $x(n)$ 和 $h(n)$ 的顺序不会改变结果的值。

$$x(n) * h(n) = h(n) * x(n) \quad (1-35)$$

2) 结合律

结合律的意思是两个线性移不变系统级联后仍然是一个线性移不变系统，并且与这两个级联系统的先后次序无关。

$$\begin{aligned} x(n) * h_1(n) * h_2(n) &= [x(n) * h_1(n)] * h_2(n) \\ &= x(n) * [h_1(n) * h_2(n)] \\ &= [x(n) * h_2(n)] * h_1(n) \end{aligned} \quad (1-36)$$

3) 分配律

分配律的意思是两个线性移不变系统的并联等效系统的单位抽样响应等于两个系统各自单位抽样响应之和。

$$x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n) \quad (1-37)$$

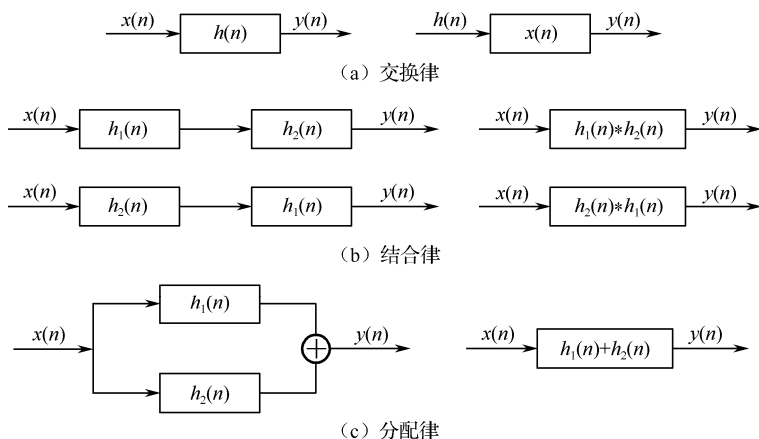


图 1-25 线性移不变系统组合的运算律

线性、移不变性是时域离散系统的重要特性。判断系统是否为线性系统，可以通过判断系统是否满足叠加原理和比例性的特点来判断。判断系统是否为移不变系统，关键要看系统的响应是否与激励施加于系统的时刻无关。

【例 1-17】 已知系统的差分方程如下，试判断该系统是否为移不变线性系统。

$$y(n) - 0.4y(n-1) + 0.3y(n-2) = x(n) - 2x(n-1)$$

解：判断系统是否为线性、移不变系统，可分别从线性和移不变性两个方面来判断，编写两个程序分别实现。

(1) 判断系统是否为线性系统

设 3 个不同的输入序列 $x_1(n)$ 、 $x_2(n)$ 和 $x(n)$ ，并且 $x(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$ ，对应的系统输出序列为 $y_1(n)$ 、 $y_2(n)$ 和 $y(n)$ 。若 $y(n) = ay_1(n) + by_2(n)$ ，则系统为线性系统。

MATLAB 程序如下。

```
n=1:40;a=2;b=3;
x1=cos(2*pi*0.1*n);x2=cos(2*pi*0.4*n)
x=a*x1+b*x2;
num=[1,-2];den=[1,-0.4,0.3];
y1=filter(num,den,x1);y2=filter(num,den,x2);%filter 函数用来求系统的响应
y=filter(num,den,x);
yt=a*y1+b*y2;
subplot(2,1,1);stem(n,y);title('输出 y 的振幅');
subplot(2,1,2);stem(n,yt);title('输出 a*y1+b*y2 的振幅');
```

程序运行结果如图 1-26 所示。从图中可以看出，两次计算的结果图形完全相同，因而能够证明

$$y(n) = T[ax_1(n) + bx_2(n)] = aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)]$$

所以该系统是线性系统。

(2) 判断系统是否为移不变系统

MATLAB 程序如下。

```
n=1:40;D=9;
a=3;b=5;
x=a*cos(2*pi*0.1*n)+b*cos(2*pi*0.4*n);
xd=[zeros(1,D),x];
num=[1,-2];
den=[1,-0.4,0.3];
```

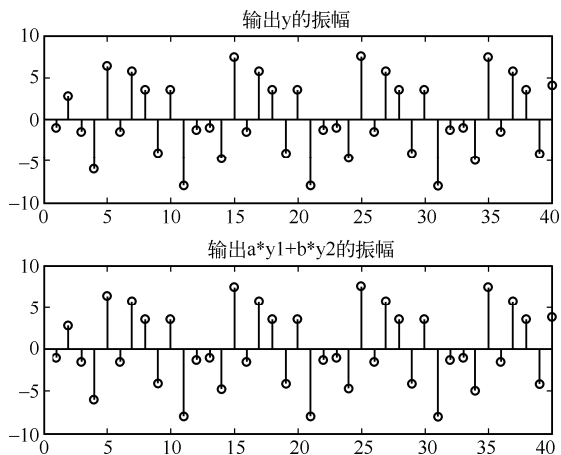


图 1-26 例 1-17 系统线性判断程序运行结果图

```
y=filter(num,den,x);yd=filter(num,den,xd);
subplot(2,1,1);stem(y);title('输入为x(n)时的输出');
subplot(2,1,2);stem(yd);title('输入为x(n-D)时的输出');
```

程序运行结果如图 1-27 所示。从图中可以看出,输入序列延时 9 个单位,输出序列也相应延时了 9 个单位,所以该系统是移不变系统。

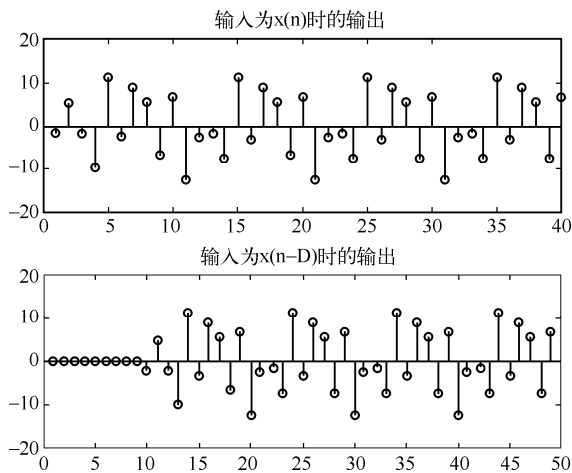


图 1-27 例 1-17 系统移不变性判断程序运行结果图

从以上分析可以得出结论,题中给出的系统是线性移不变系统。

1.3.4 系统的因果性和稳定性

线性和移不变性两个约束条件定义了一类可用卷积和表示的系统。稳定性和因果性也是很重要的性质,它们描述系统有界或收敛的性质,系统输出与输入及输入产生时刻之间关系的性质。

1. 因果系统

若系统某时刻的输出只取决于该时刻和该时刻以前的输入序列,而与该时刻以后的输入无关,则称该系统为因果系统,即 $n = n_0$ 的输出 $y(n_0)$ 只取决于 $n \leq n_0$ 的输入 $x(n)|_{n \leq n_0}$ 。如果系统某时刻的输出不仅取决于该时刻和该时刻以前的输入,还取决于该时刻以后的输入,则该系统不符合因果关系,是非因果系统。如果系统是因果系统,则为物理可实现系统。

LSI 系统是因果系统的充分必要条件是

$$h(n) = 0 \quad n < 0 \quad (1-38)$$

例如, 系统 $y(n) = nx(n)$ 是因果系统, $y(n) = x(n+1) + ax(n)$ 是非因果系统, $y(n) = x(-n)$ 是非因果系统。需要注意的是, 判定线性移不变系统的因果性, 一定要把输入信号的影响与系统函数中其他函数的影响区分开, 因为系统的因果性受输入函数与输出函数之间关系的影响, 而不受系统中其他因素的影响。例如, $y(n) = x(n)\sin(n+1)$ 是因果系统。

2. 稳定系统

稳定系统是有界输入产生有界输出的系统。只有系统是稳定的, 系统才能正常工作。如果系统是稳定的, 则当 $|x(n)| \leq M < \infty$ 时, $|y(n)| \leq P < \infty$ 。

证明一个系统是稳定系统, 必须证明该系统在所有有界输入下都产生有界输出。但要证明一个系统是不稳定系统, 则只需证明在某个特别的有界输入下, 系统得到一个无界输出即可。

例如, 系统 $y(n) = nx(n)$ 是不稳定的, 系统 $y(n) = a^{x(n)}$ (a 为正整数) 是稳定的。

LSI 系统是稳定系统的充要条件是系统的单位脉冲响应绝对可和, 即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \quad (1-39)$$

3. 稳定的因果系统

既满足稳定性又满足因果性的系统是稳定的因果系统。因果稳定的 LSI 系统的单位脉冲响应是因果的且绝对可和, 即

$$\begin{cases} h(n) = h(n)u(n) \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \end{cases} \quad (1-40)$$

稳定因果系统既是可实现的, 又是稳定工作的系统。

【例 1-18】 某 LSI 系统的单位脉冲响应为 $h(n) = a^n u(-n)$, 试讨论其因果性和稳定性。

解: 讨论因果性。

因为当 $n < 0$ 时, $h(n) \neq 0$, 所以该系统是非因果系统。

讨论稳定性。

$$\text{因为} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=-\infty}^0 |a^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a|^{-n} = \begin{cases} \frac{1-|a|^{-\infty}}{1-|a|^{-1}} = \frac{1}{1-|a|^{-1}} & |a| > 1 \\ \infty & |a| \leq 1 \end{cases}$$

所以当 $|a| > 1$ 时, 系统稳定; 当 $|a| \leq 1$ 时, 系统不稳定。

【例 1-19】 如果系统传递函数为 $H(z) = \frac{1+2z^{-1}}{1+0.8z^{-1}+0.5z^{-2}}$, 试用 MATLAB 绘制系统的频率响应

特性曲线和零、极点图, 并判断系统的稳定性。

解: MATLAB 程序如下。

```
b=[1,2];a=[1,0.8,0.5];
figure(1);zplane(b,a);%调用函数 zplane 求零、极点
figure(2);freqz(b,a);
```

程序运行结果如图 1-28 所示。图 1-28 (a) 所示为系统零、极点, 图 1-28 (b) 所示为系统的幅频特性和相频特性。

从图 1-28 (a) 中可以看出, 系统的两个极点都在单位圆内, 系统是稳定的。

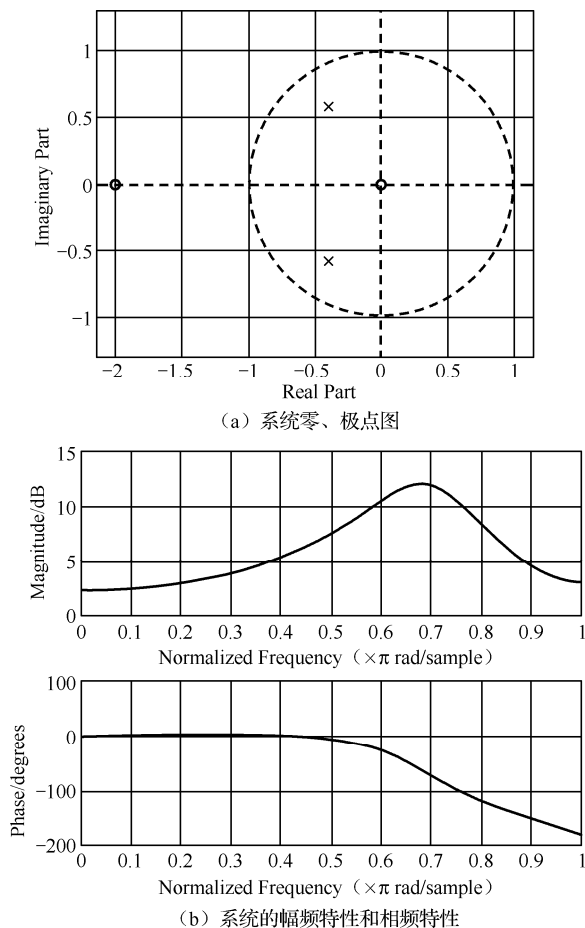


图 1-28 例 1-19 系统稳定性判断程序运行结果图

1.4 模拟信号数字处理方法

对模拟信号采用数字处理方法, 首先需要将模拟信号转换为数字信号, 这个过程可以通过抽样、量化、编码三个步骤来完成。抽样就是利用周期性抽样脉冲序列, 从连续信号中抽取一系列离散值, 得到时域离散信号。将模拟信号转换为数字信号的过程称为模数转换。将数字信号重新恢复为模拟信号的过程称为数模转换。要研究的问题是: 连续信号经过抽样以后, 其频谱的变化情况如何? 抽样信号能否不失真地恢复原来的连续信号?

1.4.1 抽样定理及 A/D 转换器

是否任意时间间隔的抽样都能反映原连续信号的基本特征呢? 来看一个简单的例子, $x_a(t) = \sin(t)$, 其波形如图 1-29 (a) 所示。当采用抽样间隔 $\pi/6$ 、 $5\pi/4$ 进行抽样后, 得到的序列如图 1-29 (b) 和 (c) 所示。

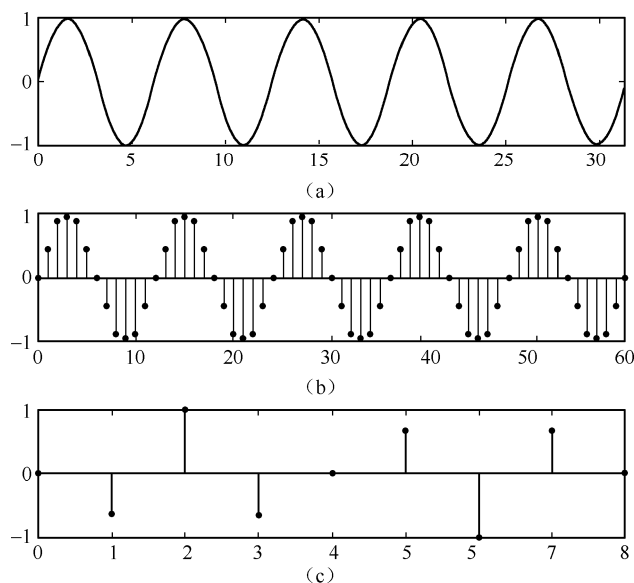


图 1-29 正弦信号抽样序列实例

从图中可以看出：抽样间隔越小，抽样信号越能反映原连续信号的特征；抽样间隔过大，会完全丢失原连续信号的特征。同时，抽样间隔越小，数字信息的数据量越大，进行数字信号处理的复杂程度越高。因此，有必要研究抽样间隔小到什么程度，恰好能不失真地恢复原来的连续信号。奈奎斯特 (Nyquist) 通过研究信号频谱得出了抽样频率和信号频率之间的定量关系，这就是著名的 Nyquist 抽样定理。

Nyquist 抽样定理：设 $x_a(t)$ 是一个严格带限的连续信号，即

$$X_a(j\Omega) = 0 \quad |\Omega| > \Omega_h \quad (1-41)$$

要想对 $x_a(t)$ 抽样后能够不失真地还原原模拟信号，则抽样频率 f_s (或 Ω_s) 必须大于或等于两倍信号谱的最高频率 f_h (或 Ω_h)，即

$$f_s \geq 2f_h \text{ 或 } \Omega_s \geq 2\Omega_h \quad (1-42)$$

Nyquist 抽样定理给出了能不失真恢复原连续信号的最小抽样频率，即 $f_s = 2f_h$ ，称为奈奎斯特频率；同时，也给出了最大抽样间隔，即 $T = T_h / 2$ 。特殊地，对连续正弦信号抽样时要求抽样频率大于正弦信号频率的两倍，否则，抽样信号不能恢复正弦信号。

在实际应用中，由于物理信号的频率往往不能保证完全是限带信号，通常是高于某个较高频率信号的幅度可以小到忽略不计的程度。这样，可以近似地视为限带信号。所以，通常在抽样之前进行预滤波，滤除截止频率以上的频率，实现预滤波的滤波器称为预滤波器（也称为防混叠滤波器）。对于低频限带信号，通常采用低通滤波器进行预滤波。进行预滤波的目的就是防止频谱混叠。

A/D 转换器中的抽样器可以视为电子开关，如图 1-30 (a) 所示。当有模拟信号输入时，电子开关的输出端可以得到抽样信号，如图 1-30 (b) 所示。设电子开关每隔时间 T 闭合一次，每次合上的时间为 τ ($\tau \ll T$)，在电子开关的输出端得到实际抽样信号，如图 1-31 (a) 所示。当 $\tau \rightarrow 0$ 时，在电子开关的输出端得到理想抽样信号，如图 1-31 (b) 所示。

在理想抽样情况下，抽样信号 $\hat{x}_a(t)$ 等于连续时间信号 $x_a(t)$ 与周期脉冲信号 $p(t)$ 相乘，如图 1-31 (b) 所示。这里， $p(t)$ 为冲激函数序列 $\delta_T(t)$ ，即

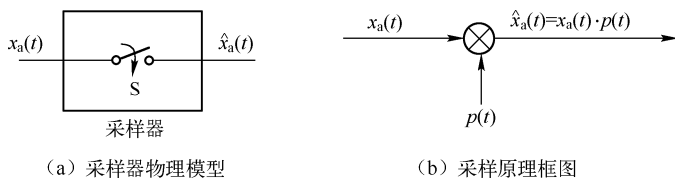


图 1-30 抽样原理图

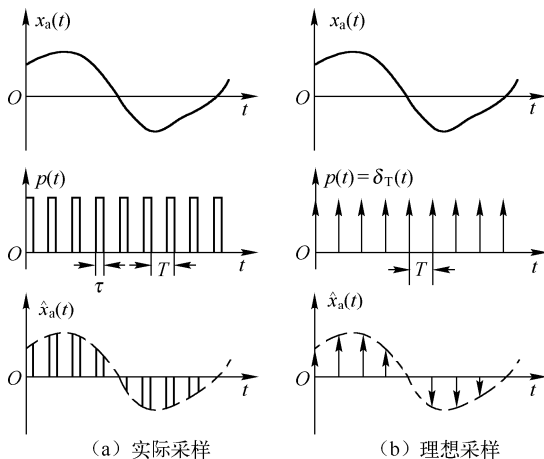


图 1-31 连续时间信号抽样

$$\delta_T(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT) \quad (1-43)$$

因此, 理想抽样信号为

$$\begin{aligned} \hat{x}_a(t) &= x_a(t) \cdot \delta_T(t) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_a(t) \delta(t - mT) \end{aligned} \quad (1-44)$$

根据单位冲激信号的抽样性, 得

$$\hat{x}_a(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_a(mT) \delta(t - mT) \quad (1-45)$$

式中, $x_a(mT) = x_a(t)|_{t=mT}$ 就是序列值。抽样间隔也称为抽样周期, 抽样周期的倒数称为抽样频率, 表示单位时间内的抽样个数, $f_s = 1/T$, 单位为赫兹 (Hz)。 $\Omega_s = 2\pi f_s$ 称为抽样角频率。

1.4.2 抽样信号的恢复

模拟信号在进行数字信号处理后, 能否再恢复为模拟信号呢? 可以通过观察抽样信号的频谱来得出这样的结论: 如果满足 Nyquist 抽样定理, 则将抽样信号 $x_a(t)$ 通过理想低通滤波器。

$$|H(j\Omega)| = \begin{cases} T & |\Omega| \leq \frac{\Omega_s}{2} \\ 0 & |\Omega| > \frac{\Omega_s}{2} \end{cases} \quad (1-46)$$

滤波后可以不失真地恢复原来的模拟信号。该理想低通滤波器称为重构滤波器, 其频率特性如图 1-32 所示, 增益为 T , 截止频率为 $\frac{\Omega_s}{2}$ 。

根据抽样原理, 抽样信号 $\hat{x}_a(t)$ 可以表示为原模拟信号 $x_a(t)$ 与抽样序列 $\delta_T(t)$ 的乘积, 即

$$\hat{x}_a(t) = x_a(t)\delta_T(t) \quad (1-47)$$

根据频域卷积定理, 抽样信号的频谱为

$$\hat{X}_a(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} [X_a(j\Omega) * \Delta_T(j\Omega)] \quad (1-48)$$

式中, $\Delta_T(j\Omega)$ 为抽样序列 $\delta_T(t)$ 的频谱

$$\Delta_T(j\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s) = \Omega_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s) \quad (1-49)$$

代入式 (1-48), 得

$$\begin{aligned} \hat{X}_a(j\Omega) &= \frac{1}{2\pi} \times \frac{2\pi}{T} \left[X_a(j\Omega) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s) \right] \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a[j(\Omega - k\Omega_s)] \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - jk\Omega_s) \end{aligned} \quad (1-50)$$

因此, 抽样信号的频谱除含有原模拟信号的频谱 $X(j\Omega)$ 外, 还在 Ω_s 的整数倍存在 $X(j\Omega)$ 的移位频谱。抽样信号的频谱可以视为原模拟信号频谱以 Ω_s 为周期的周期延拓 (幅度减小为原模拟信号的 $\frac{1}{T}$)。

如果原模拟信号的频谱如图 1-33 (a) 所示, 抽样序列的频谱如图 1-33 (b) 所示, 则当 $\Omega_s \geq 2\Omega_h$ 时 (Ω_h 为连续信号的最高角频率), 如图 1-33 (c) 所示, $X(j\Omega)$ 频谱周期性重复, 而且不发生混叠; 当 $\Omega_s < 2\Omega_h$ 时, 如图 1-33 (d) 所示, 抽样信号的频谱就会发生混叠, 不能无失真地恢复原始信号。

在没有频谱混叠的情况下, 可以采用一个理想低通滤波器恢复原模拟信号, 理想低通滤波器的截止频率 Ω_c 满足条件

$$\Omega_h \leq \Omega_c \leq \Omega_s / 2 \quad (1-51)$$

当抽样信号 $\hat{X}_a(j\Omega)$ 通过该滤波器时, 滤波器的作用等效于用一个门函数与 $\hat{X}_a(j\Omega)$ 相乘, 因此滤波器的输出为

$$\begin{aligned} \hat{Y}_a(j\Omega) &= \hat{X}_a(j\Omega)H(j\Omega) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - jk\Omega_s)H(j\Omega) \\ &= \frac{1}{T} X_a(j\Omega) \end{aligned} \quad (1-52)$$

抽样恢复频谱图如图 1-34 所示。图 1-34 (a) 所示为抽样恢复频域示意图; 图 1-34 (b) 所示为 $\Omega_s \geq 2\Omega_h$ 时的理想抽样信号的频谱; 图 1-34 (c) 所示为重构滤波器特性; 图 1-34 (d) 所示为滤波器输出的原模拟信号的频谱。

根据时域卷积定理, 当抽样信号 $\hat{x}_a(t)$ 通过时, 重建滤波器的输出为 $\hat{x}_a(t)$ 和 $h(t)$ 的卷积积分。

截止频率为 Ω_c 的重建滤波器, 其单位冲激响应为

$$h(t) = F^{-1}[H(j\Omega)] = \frac{\sin(\pi t / T)}{\pi t / T} \quad (1-53)$$

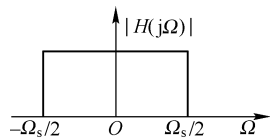


图 1-32 理想低通滤波器的频率特性

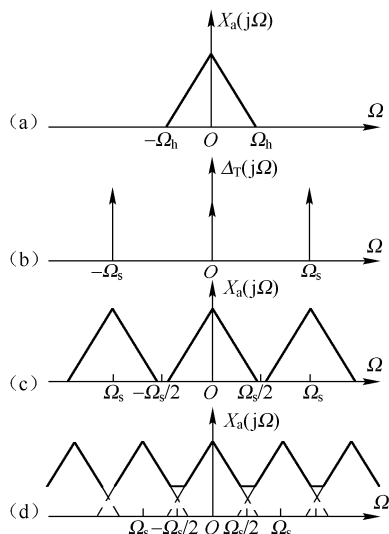


图 1-33 理想抽样信号和抽样序列的频谱

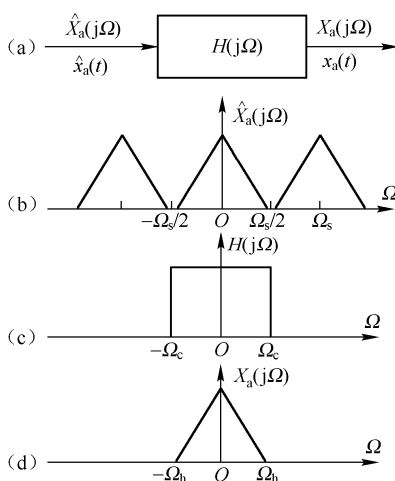


图 1-34 抽样恢复频谱图

重建滤波器的输出为

$$\begin{aligned}
 y_a(t) &= \hat{x}_a(t) * h(t) \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_a(mT) \frac{\sin[\pi(t-mT)/T]}{\pi(t-mT)/T}
 \end{aligned} \quad (1-54)$$

由式(1-54)可知,利用抽样函数作为内插函数,可以把时间离散的样值序列恢复为时间连续的模拟信号。

重建信号的时域表达式称为内插公式,其中 $\frac{\sin[\pi(t-mT)/T]}{\pi(t-mT)/T}$ 称为核函数。由内插公式可知,

一个时间上的连续信号可以展开为 Sa 函数的无穷级数,级数的系数等于抽样值 $x_a(mT)$ 。从几何意义上说,以每一个抽样值为峰值画一个 Sa 函数的波形,则合成的波形就是 $x_a(t)$ 。图 1-35 所示为重建原始信号示意图。

1.5 本章小结

本章重点介绍了时域离散信号序列、时域离散系统及抽样的基本概念。详细讨论了序列的运算及时域离散系统的基本性质,分析了正弦序列的周期性及其连续正弦信号抽样形成离散周期正弦序列的条件,介绍了数字信号处理的应用实例,讨论了 MATLAB 仿真在数字信号处理中的应用。

序列的运算有相加、相乘、累加和、差分、移位、反褶、尺度变换(抽取和插值)、线性卷积和等。利用单位抽样序列的特性,任意序列可表示成单位抽样序列的移位加权。

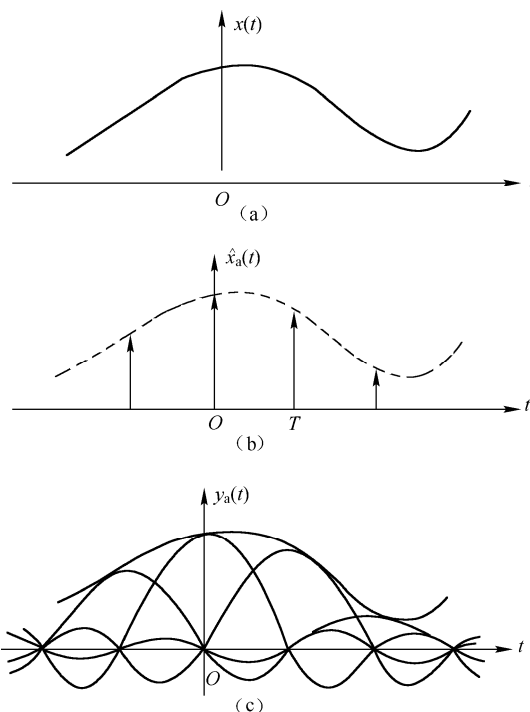


图 1-35 重建原始信号示意图

时域离散系统的实质是将输入序列变换成输出序列的一种运算, 系统如果同时具有线性和移不变性, 则该离散系统是线性移不变系统 (LSI)。LSI 系统对任意序列的系统响应等于输入序列和单位脉冲响应的卷积和。LSI 系统为因果稳定系统的充要条件是单位脉冲响应是因果的, 并且是绝对可和的。

抽样是模拟信号数字化的重要步骤, 也是在数字信号处理中从模拟信号获取时域离散信号的方法。对带限时域模拟信号, 用周期脉冲序列进行等间隔抽样, 形成抽样信号, 得到时域离散信号。抽样信号的频谱是原模拟信号的频谱以抽样脉冲序列的频率为周期进行周期延拓形成的。为了保证不失真地恢复原模拟信号, 必须避免频谱混叠。抽样前先经过低通滤波, 对于低通模拟信号, 抽样频率的选取应满足奈奎斯特抽样定理, 即抽样频率大于等于低通模拟信号最高频率的两倍; 抽样恢复过程可以采用截止频率为奈奎斯特频率的理想低通滤波器, 当抽样序列经过此滤波器时, 频域中完全恢复了原模拟信号的频谱。在时域中, 抽样恢复过程可以用内插公式解释。

线性移不变系统和时域离散信号是数字信号处理技术的重点研究内容, MATLAB 软件为数字信号处理技术提供了高效的计算和仿真平台。

习题 1

基础习题

1-1 已知两个序列

$$x(n) = \begin{cases} 2 & n = -1 \\ 1 & n = 0 \\ 1 & n = 1 \\ -1 & n = 2 \\ 0 & n = 3 \\ 3 & n = 4 \\ 1 & \text{其他} \end{cases} \quad y(n) = \begin{cases} 3 & n = -2 \\ 0 & n = -1 \\ 2 & n = 0 \\ 1 & n = 1 \\ 3 & n = 2 \\ -1 & \text{其他} \end{cases}$$

求解下列运算:

- (1) $z_1(n) = x(n) + y(n)$
- (2) $z_2(n) = x(n) \cdot y(n)$
- (3) $z_3(n) = \sum_{m=-\infty}^n x(m)$
- (4) $z_4(n) = x(n-2)$
- (5) $z_5(n) = x(-n)$
- (6) $z_6(n) = x(2n)$

1-2 已知某系统的单位抽样响应 $h(n) = 3^n u(n)$, 则该系统是_____。

- A. 因果稳定系统
- B. 因果非稳定系统
- C. 非因果稳定系统
- D. 非因果非稳定系统

1-3 系统输入序列 $x(n]$ 和输出序列 $y(n]$ 满足差分方程 $y(n) = 3x(n) + 8$, 则该系统是_____。

- A. 线性移不变系统
- B. 非线性移不变系统
- C. 线性移变系统
- D. 非线性移变系统

1-4 时域离散信号是时间为离散变量的信号, 即独立变量时间_____ (量化/连续), 幅度_____ (量化/连续)。

1-5 线性移不变系统为因果系统的充分必要条件是_____。

1-6 线性移不变系统具有_____、_____和_____三个基本性质。

1-7 若信号频带宽度有限, 要想对该信号抽样后能够不失真地还原原信号, 则抽样频率 Ω_s 和信号谱的最高频率 Ω_c 必须满足_____。

- A. $\Omega_s < \Omega_c$
- B. $\Omega_s > \Omega_c$

C. $\Omega_s < 2\Omega_c$

D. $\Omega_s > 2\Omega_c$

1-8 下列系统(其中 $y(n)$ 为输出序列, $x(n)$ 为输入序列)中, _____ 属于线性系统。

A. $y(n)=y(n-1)x(n)$

B. $y(n)=nx(n)+5$

C. $y(n)=x(2n)$

D. $y(n)=x(n)-y(n-1)$

1-9 序列 $x(n)=\cos\left(\frac{3\pi}{5}n\right)$ 的周期为_____。

A. 3

B. 5

C. 10

D. ∞

1-10 序列 $x(n)=0.5^n u(n)$ 的能量为_____。

A. 0.5

B. 2

C. 5

D. ∞

1-11 已知序列 $h(n)=3\delta(n-2)+2\delta(n-4)+0.2\delta(n-5)+0.7\delta(n-7)$ 和序列 $x(n)=\delta(n)$, 计算序列 $x(n)$ 和序列 $h(n)$ 的积_____。

1-12 因果系统是指某时刻的输出只取决于_____时刻输入的系统。

1-13 将序列 $x(n)$ 表示成单位抽样序列 $\delta(n)$ 的移位加权和, 即_____。

1-14 如果使用 5kHz 的抽样频率对某连续信号进行无失真的数字信号处理, 则信号的最高频率为_____kHz。

A. 2.5

B. 10

C. 5

D. 1.25

1-15 某一线性移不变系统如图 1-36 所示, 则 $h(n)=$ _____。

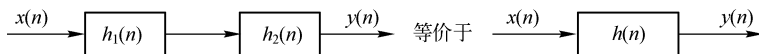


图 1-36 习题 1-15 图

1-16 线性移不变系统 $h(n)=u(n)$ _____ (是/不是) 因果系统, _____ (是/不是) 稳定系统。

综合习题

1-17 线性移不变系统的单位冲激响应为

$$h(n)=3\delta(n-2)+2\delta(n-4)+0.2\delta(n-5)+0.7\delta(n-7)$$

对该系统输入序列 $x(n)=u(n-2)$, 求系统的输出。

1-18 判断下列序列是否为周期序列, 若是周期序列, 确定序列的周期。

(1) $x(n)=e^{j\left(\frac{n}{2}+\pi\right)}$

(2) $x(n)=2\cos\left(\frac{7\pi}{8}n\right)$

(3) $x(n)=\cos\left(5\pi n+\frac{\pi}{4}\right)$

(4) $x(n)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}n\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{5}n\right)$

1-19 计算下列各题。

(1) 已知 $x(n)=2^{n-1}[u(n-2)-u(n-6)]$, $h(n)=\frac{1}{3}u(n)$, 求 $x(n)*h(n)$ 。

(2) 已知 $x(n)=(7-n)u(n-6)$, 求 $x(n-4)$ 。

1-20 用单位抽样序列及其加权和表示图 1-37 所示的序列。

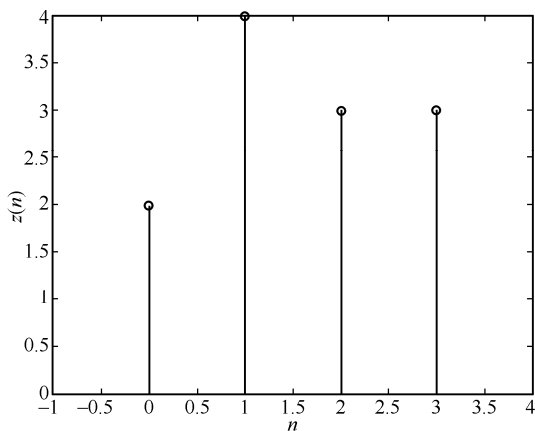


图 1-37 习题 1-20 图

1-21 判断下列系统是否是线性系统。

(1) $y(n] = x(n) \sin\left(\frac{7\pi}{8}n + \frac{\pi}{5}\right)$

(2) $y(n) = 4x(n)$

1-22 判断下列系统是否是移不变系统。

(1) $y(n) = x(n) \sin\left(\frac{7\pi}{8}n\right)$

(2) $y(n) = x(3n) + x(n)$

1-23 判断下列系统是否是因果系统。

(1) $y(n) = x(3n) + x(n)$

(2) $y(n) = x(n-6)$

1-24 判断下列系统是否是稳定系统。

(1) $y(n) = x(n) + 2$

(2) $y(n) = e^2 x(n)$

1-25 线性移不变系统的单位脉冲响应 $h(n)$ 和输入序列 $x(n)$ 分别如下, 分别求输出响应 $y(n)$ 。

(1) $h(n) = u(n)$, $x(n) = \delta(n-2)$

(2) $h(n) = 2^{-n}u(n)$, $x(n) = u(n-2) - u(n-8)$

1-26 设 $x_a(t) = \sin(\pi t)$, $x(n) = x_a(nT) = \sin(\pi nT)$, 其中 T 为抽样间隔, 试求:

(1) $x_a(t)$ 的模拟域频率 Ω ;

(2) 当 $T = 2\text{s}$ 时, $x(n)$ 的数字域频率 ω ;

(3) 模拟域频率 Ω 与数字域频率 ω 的关系。

1-27 设 $x_a(t) = 1 + \cos(200\pi t) + 2\sin(300\pi t)$, 求 $x_a(t)$ 的奈奎斯特频率, 如果采用奈奎斯特频率的两倍频率进行抽样, 则抽样后 $x(n)$ 的数字角频率为多少?

第2章 离散系统的变换域分析与系统结构



学习重点

- ★ 掌握 Z 变换的定义、性质及 Z 反变换的求法。
- ★ 掌握常用序列的 Z 变换, 理解收敛域的含义。
- ★ 掌握傅里叶变换 (FT) 的定义和性质。
- ★ 掌握离散系统的变换域分析方法。
- ★ 理解 Z 变换与傅里叶变换的关系。
- ★ 理解系统函数和频率响应的定义和关系。
- ★ 掌握系统特性与系统函数的关系。
- ★ 掌握 IIR 和 FIR 系统结构流图的画法。

2.1 引言

离散系统的分析方法通常分为时域分析和变换域分析两大类。其中, 时域分析法一般采用直接解差分方程或利用线性卷积的方法来求系统响应, 该部分内容已经在第1章进行了研究, 此处不再赘述, 本章将重点讲述 LSI 离散系统的变换域分析法, 这是另一类常见的系统分析法, 在实际中有广泛的应用。变换域分析法通常又分为频域分析法和 Z 域分析法。

本章前半部分重点介绍序列傅里叶变换和 Z 变换的相关内容, 以及基于 Z 变换的离散系统 Z 域分析法。 Z 变换在离散系统分析中占据着重要地位, 这是因为在离散系统分析中引入 Z 变换和 Z 域分析法后, 可以将离散系统的差分方程转换为代数方程, 使求解过程大大简化。另外, 系统函数是单位脉冲响应的 Z 变换, 系统函数的零、极点分布情况也决定了系统的稳定性和因果性。因此, 序列傅里叶变换、 Z 变换及其性质是本章的核心内容, 是变换域分析的重要数学手段, 读者应熟练理解和掌握。

本章后半部分将重点介绍如何根据系统的差分方程和系统函数, 画出离散系统的多种结构流图。尽管同一个系统可以用不同的结构流图去实现, 然而不同的系统结构流图代表不同的算法, 不同的算法又直接影响系统的运算速度、误差和系统的复杂程度, 因此研究系统的结构流图是信号分析中的重要问题。这一部分将介绍离散系统各种类型的结构流图画法, 分析各自的优缺点, 为离散系统的分析、设计及具体的物理实现提供了方法和依据。

2.2 序列 Z 变换的定义和收敛域

1. Z 变换的定义

Z 变换 (简称 ZT) 是一种常用的数学变换, 根据求和下限的不同取值, 又分为双边和单边两种。设 $x(n)$ 为任意序列, 序列的双边 Z 变换定义如下:

$$X(z) = \text{ZT}[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (2-1)$$

$X(z)$ 称为序列 $x(n)$ 的双边 Z 变换。

此处 z 为复数变量, 可表示为

$$z = e^{j\Omega T}$$

$$z = e^{sT}, s = \sigma + j\Omega$$

由于实际信号通常为因果序列, 即当自变量 $n < 0$ 时序列值为零, 因此又可以定义序列的单边 Z 变换为

$$X(z) = ZT[x(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (2-2)$$

通常将 $x(n)$ 和 $X(z)$ 称为一对 Z 变换对, 其中 $x(n)$ 称为原函数, $X(z)$ 称为像函数, 可以用 $x(n) \leftrightarrow X(z)$ 表示。

要点一: 熟记双边和单边 Z 变换的定义式, 并注意两者的区别。

显然, 当 $x(n)$ 为因果序列时, 双边 ZT 和单边 ZT 的结果相同, 若无特别说明, 本书中的 Z 变换通常是指双边 Z 变换。

2. 收敛域

由上述定义可知, Z 变换 $X(z)$ 是无穷级数, 为保证该无穷级数收敛, 或者说 Z 变换存在, 则需限定复数变量 z 的取值范围, 这里可以把使 Z 变换 $X(z)$ 收敛的所有的 z 值集合称为 $X(z)$ 的收敛域, 通常简记为 ROC (Region Of Convergence)。下面以例题的形式给出收敛域的含义和求法。

【例 2-1】 求序列 $x(n) = a^n u(n)$ 的 Z 变换及收敛域。

解: 该序列为实指数序列, 且为因果序列, 由 Z 变换的定义式得

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n \\ &= 1 + az^{-1} + (az^{-1})^2 + \cdots + (az^{-1})^n + \cdots \end{aligned}$$

显然该式为等比级数, 为求其结果, 需要考虑 z 的取值范围。

只有当 $|az^{-1}| < 1$, 即 $|z| > |a|$ 时, 上式为递缩级数, 此时

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

即当复数变量 z 取 z 平面上以原点为圆心, 半径为 $|a|$ 的圆以外的区域时, 该级数才是收敛的, 其结果为 $\frac{1}{1 - az^{-1}}$, 而当 z 取该范围以外的所有值时, 级数都是发散的, 因此收敛域为 $|z| > |a|$ 。如图 2-1 所示的阴影部分即为该序列的 Z 变换收敛域。

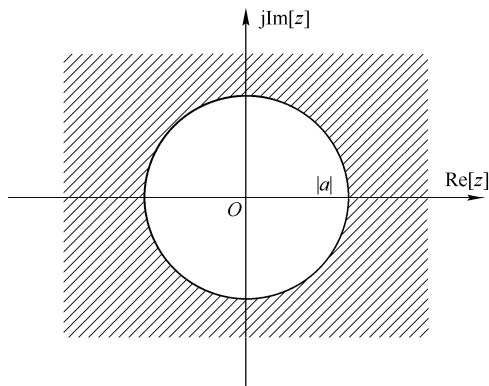


图 2-1 $x(n) = -a^n u(n)$ 收敛域

【例 2-2】 求非因果序列 $x(n) = -a^n u(-n-1)$ 的 Z 变换及其收敛域。

解:

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} -a^n u(-n-1) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} -a^n z^{-n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} -a^{-n} z^n = -\sum_{n=1}^{\infty} (a^{-1} z)^n \end{aligned}$$

若使上式收敛,则要求 $|a^{-1}z| < 1$, 即收敛域为 $|z| < |a|$, 此时

$$x(z) = \frac{-a^{-1}z}{1-a^{-1}z} = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

即收敛域应为 $|z| < |a|$ 。如图 2-2 所示的阴影部分即为该序列的 Z 变换收敛域。

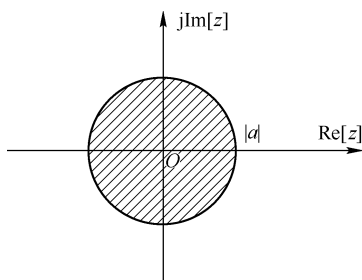


图 2-2 $x(n) = -a^n u(-n-1)$ 收敛域

要点二: 不同的序列可能具有相同的 Z 变换, 但要注意其收敛域是不同的。

要点三: 收敛域内不会存在极点。

要点四: 收敛域通常是以极点为边界的环形区域。

3. 收敛域与序列特性的关系

序列在时域的不同分布情况决定了其 Z 变换的收敛域在复频域 (Z 域) 不同的分布情况。现举例分析并总结如下。

(1) 有限长序列

$$x(n) = \begin{cases} x(n) & n_1 \leq n \leq n_2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

【例 2-3】 求矩形序列 $R_N(n)$ 的 Z 变换及其收敛域。

解:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_N(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$$

由结果的分母可以看出, 似乎 $z=1$ 是 $X(z)$ 的极点, 但同时分子多项式在 $z=1$ 时也有一个零点, 零、极点对消, 因此收敛域为 $|z| > 0$, 即除原点外的整个 z 平面。

(2) 右边序列

$$x(n) = \begin{cases} x(n) & n \geq n_1 \\ 0 & n < n_1 \end{cases}$$

由例 2-1 的结论可知, 一般右边序列的收敛域为 $R_x < |z| < \infty$, 即复平面上半径为 R_x 的圆的外侧区域, R_x 称为收敛半径。

(3) 左边序列

$$x(n) = \begin{cases} x(n) & n \leq n_2 \\ 0 & n > n_2 \end{cases}$$

由例 2-2 的结论可知, 一般左边序列的收敛域为 $|z| < R_{x+}$, 即复平面上半径为 R_{x+} 的圆的内部。

(4) 双边序列

一个双边序列可以看成是一个左序列和一个右序列之和, 其 Z 变换为

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)z^{-n}$$

因此, 双边序列的收敛域应为两部分收敛域的交集, 即 $R_{x-} < |z| < R_{x+}$ 。

要点五: 因果有限长序列 Z 变换的收敛域为整个 z 平面 ($z=0$ 除外)。

要点六: 右边序列 Z 变换的收敛域为 z 平面上以原点为圆心的某圆的外侧。

要点七: 左边序列 Z 变换的收敛域为 z 平面上以原点为圆心的某圆的内侧。

要点八: 双边序列 Z 变换的收敛域为 z 平面上以原点为圆心的某圆环内。

【例 2-4】 已知 $x(n) = b^{|n|}$, $0 < b < 1$, 求 $x(n)$ 的 Z 变换及其收敛域。

解:

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} b^{|n|} z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} b^{-n} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} b^n z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} b^n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b^n z^{-n} \\ &= \frac{bz}{1-bz} + \frac{1}{1-bz^{-1}} = \frac{1-b^2}{(1-bz)(1-bz^{-1})} \end{aligned}$$

左边序列 $b^n u(-n-1)$ 的 Z 变换的收敛域为 $|z| < b^{-1}$, 而右边序列 $b^n u(n)$ 的 Z 变换的收敛域为 $|z| > b$ 。显然, 双边序列 $x(n) = b^{|n|}$ 由上述两序列相加得到, 其收敛域必为左边序列和右边序列 Z 变换收敛域的交集, 即收敛域为 $b < |z| < b^{-1}$, 如图 2-3 所示。

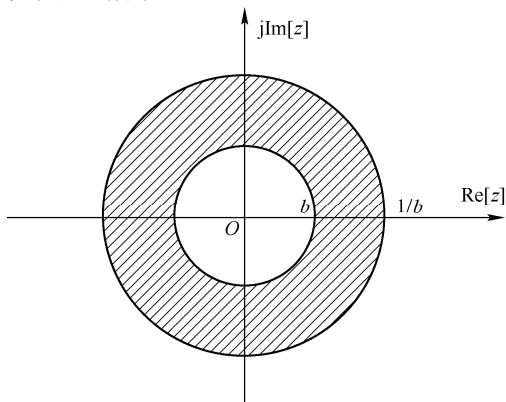


图 2-3 $x(n) = b^{|n|}$ 的收敛域

(5) 常见序列的 Z 变换

【例 2-5】 求单位序列 $\delta(n)$ 及其移位序列 $\delta(n-8)$ 和 $\delta(n+5)$ 的 Z 变换和收敛域。

解:

$$\begin{aligned} ZT[\delta(n)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n)z^{-n} = z^0 = 1 \\ ZT[\delta(n-8)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-8)z^{-n} = z^{-8} \end{aligned}$$

$$ZT[\delta(n+5)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n+5)z^{-n} = z^5$$

由以上可知, 无论 z 取何值, 单位序列 $\delta(n)$ 的 Z 变换恒为常数 1, 因此其收敛域为整个 z 平面 (包含原点和无穷远点)。

但 $\delta(n)$ 经过向右位移以后, 如本例的 $\delta(n-8)$, 其 Z 变换为 z^{-8} , 显然收敛域不能包含原点, 因此其收敛域应为除原点外的整个 z 平面 (包含无穷远点)。

而 $\delta(n)$ 经过向左位移以后, 如本例的 $\delta(n+5)$, 其 Z 变换为 z^5 , 显然收敛域不能包含无穷远点, 因此其收敛域应为除无穷远点外的整个 z 平面 (包含原点)。

【例 2-6】 求单位阶跃序列 $u(n)$ 的 Z 变换和收敛域。

解: 根据例 2-1 的结论, 令 $a=1$, 则得到 $u(n)$ 的 Z 变换为

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

收敛域为 $|z|>1$, 即 z 平面上单位圆的外部区域 (不包含单位圆), 如图 2-4 所示。

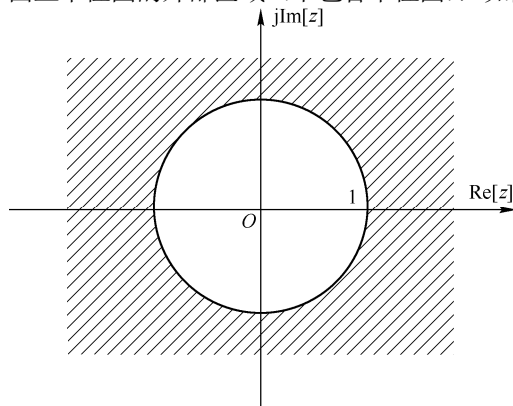


图 2-4 $x(n)=u(n)$ 的收敛域

MATLAB 的 Symbolic Math Toolbox 工具箱提供了求序列 Z 变换的函数 `ztrans`, 可利用该函数求离散时间信号的 Z 变换, 举例如下。

【例 2-7】 用 MATLAB 求以下序列的 Z 变换: $x_1(n)=[2^n+3^n]u(n)$; $x_2(n)=n-1$; $x_3(n)=n^2$; $x_4(n)=e^{j\omega n}$ 。

解: 程序如下:

```
syms z n w
x1=2^n+3^n;X1=ztrans(x1);
pretty(X1);
x2=n-1;X2=ztrans(x2);
pretty(X2);
x3=n^2;X3=ztrans(x3);
pretty(X3);
x4=exp(j*w*n);X4=ztrans(x4);
pretty(X4)
```

运行结果:

```
X1 = z/(z-2)+ z/(z-3)
X2 = z/(z-1)^2 - z/(z-1)
X3 = (z*(z + 1))/(z-1)^3
X4 = z/(z-exp(w*i))
```

这里将一些常见序列的 Z 变换和收敛域以表格的形式给出, 以便读者查阅使用, 如表 2-1 所示。

表 2-1 常见序列的 Z 变换和收敛域

序 列	Z 变 换	收 敛 域	序 列	Z 变 换	收 敛 域
$\delta(n)$	1	整个 z 平面	$R_N(n)$	$\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$	$ z > 0$
$\delta(n-m), m > 0$	z^{-m}	$ z > 0$	$-u(-n-1)$	$\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$	$ z < 1$
$\delta(n+m), m > 0$	z^m	$ z \geq 0$ (无穷远点除外)	$-a^n u(-n-1)$	$\frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$	$ z < a $
$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$	$ z > 1$	$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} = \frac{az}{(z-a)^2}$	$ z > a $
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$	$ z > a $			

2.3 Z 变换的基本性质和定理

1. 线性性质

设

$$X(z) = ZT[x(n)], \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$Y(z) = ZT[y(n)], \quad R_{y-} < |z| < R_{y+}$$

$$m(n) = ax(n) + by(n) \quad (a, b \text{ 为常数})$$

则

$$M(z) = ZT[m(n)] = aX(z) + bY(z), \quad R_{m-} < |z| < R_{m+}$$

$$R_{m-} = \max[R_{x-}, R_{y-}]$$

$$R_{m+} = \min[R_{x+}, R_{y+}]$$

2. 序列移位性质

设

$$X(z) = ZT[x(n)], \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

则

$$ZT[x(n-n_0)] = z^{-n_0} X(z), \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

3. Z 域尺度变换性质

设

$$X(z) = ZT[x(n)], \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$y(n) = a^n x(n) \quad (a \text{ 为常数})$$

则

$$Y(z) = ZT[a^n x(n)] = X(a^{-1}z), \quad |a|R_{x-} < |z| < |a|R_{x+}$$

4. Z 域微分性质

若

$$X(z) = ZT[x(n)], \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

则

$$ZT[nx(n)] = -z \frac{dX(z)}{dz}, \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

5. 初值和终值定理

若

$$X(z) = ZT[x(n)]$$

则初值

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

终值

$$x(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)X(z)]$$

6. 序列反转性质

若

$$Z[x(n)] = X(z), \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

则

$$Z[x(-n)] = X\left(\frac{1}{z}\right), \quad \frac{1}{R_{x+}} < |z| < \frac{1}{R_{x-}}$$

7. 时域卷积定理

若

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

$$Y(z) = ZT[x(n)]$$

$$H(z) = ZT[h(n)]$$

则

$$Y(z) = ZT[y(n)] = X(z) \cdot Y(z)$$

下面举例说明如何利用 Z 变换的性质来计算给定序列的 Z 变换。

【例 2-8】 求下列信号的 Z 变换并确定收敛域。

(1) $\delta(n-5)$ (2) $3^n u(n-1)$ (3) $(n-1)u(n-2)$ (4) $n(0.5)^n u(n)$

解: (1) 利用移位性质: 因为 $\delta(n) \leftrightarrow 1$, 所以 $\delta(n-5) \leftrightarrow z^{-5}$, $|z| > 0$ 。

(2) 因为 $3^n u(n) \leftrightarrow \frac{z}{z-3}$, 所以 $3^{n-1} u(n-1) \leftrightarrow \frac{1}{z-3}$, 所以 $3^n u(n-1) \leftrightarrow \frac{3}{z-3}$, $|z| > 3$ 。

(3) 因为 $u(n) \leftrightarrow \frac{z}{z-1}$, 所以 $u(n-2) \leftrightarrow \frac{z^{-1}}{z-1}$, 所以 $nu(n-2) \leftrightarrow -z \frac{d}{dz} \left(\frac{z^{-1}}{z-1} \right) = \frac{2z-1}{z(z-1)^2}$, 故

$(n-1)u(n-2) \leftrightarrow \frac{2z-1}{z(z-1)^2} - \frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{(z-1)^2}$, $|z| > 1$ 。

(4) 因为 $(0.5)^n u(n) \leftrightarrow \frac{z}{z-0.5}$, 所以 $n(0.5)^n u(n) \leftrightarrow -z \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{z-0.5} \right) = \frac{0.5z}{(z-0.5)^2}$, $|z| > 0.5$ 。

这里将 Z 变换的性质总结为表 2-2, 以供读者查阅和使用。

表 2-2 Z 变换的性质

序 号	性 质 名 称	性 质 内 容
1	线性	$x(n) \leftrightarrow X(z); y(n) \leftrightarrow Y(z)$ $ax(n) + by(n) \leftrightarrow aX(z) + bY(z)$
2	移位	$x(n) \leftrightarrow X(z)$ $x(n-m) \leftrightarrow z^{-m}X(z)$ $x(n+m) \leftrightarrow z^mX(z)$
3	尺度变换	$x(n) \leftrightarrow X(z)$ $a^n x(n) \leftrightarrow X\left(\frac{z}{a}\right)$
4	Z 域微分	$x(n) \leftrightarrow X(z)$ $nx(n) \leftrightarrow -z \frac{dX(z)}{dz}$
5	初值	$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$
6	终值	$x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z)$
7	时域卷积	$x(n) \leftrightarrow X(z); h(n) \leftrightarrow H(z); y(n) \leftrightarrow Y(z)$ $y(n) \leftrightarrow x(n) * h(n)$ $Y(z) = X(z)H(z)$

2.4 Z 反变换

在已知 Z 变换的像函数 $X(z)$ 及其收敛域的条件下, 求原序列 $x(n)$ 的过程, 称为 Z 反变换, 也称为

逆 Z 变换。

前面已经给出了序列 Z 变换的正变换公式

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}, \quad R_{x-} < |z| < R_{x+} \quad (2-3)$$

其反变换可由下式确定:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{n-1}dz, \quad c \in (R_{x-}, R_{x+}) \quad (2-4)$$

其中, c 为收敛域内任一条逆时针方向的闭合曲线。由于曲线积分的求解比较复杂, 一般很少采用这种方法求 Z 反变换, 通常采用留数法、部分分式法和长除法, 这三种方法均可求出 Z 反变换, 但复杂程度不同, 可根据需要进行选择。这里将重点介绍部分分式法。

1. 部分分式法

设 $x(n)$ 的 Z 变换 $X(z)$ 是有理函数, 将 $X(z)$ 展开成一些简单的常用的部分分式之和, 这些分式都可以通过常用的 Z 变换对确定其反变换, 再根据线性性质将各部分分式相加即得到原序列 $x(n)$ 。

在应用部分分式法时, 应特别注意各部分分式收敛域的确定, 原则如下。

(1) 收敛域以极点为边界;

(2) 总收敛域为各分式收敛域的交集, 或者说各分式的收敛域应包含总收敛域。

下面用例题加以说明。

【例 2-9】 已知 $X(z) = \frac{5z^{-1}}{1+z^{-1}-6z^{-2}}, 2 < |z| < 3$, 求其 Z 反变换。

解:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{5z^{-2}}{1+z^{-1}-6z^{-2}} = \frac{5}{z^2+z-6} = \frac{5}{(z-2)(z+3)} = \frac{A_1}{z-2} + \frac{A_2}{z+3}$$

$$A_1 = \frac{X(z)}{z}(z-2)|_{z=2} = 1$$

$$A_2 = \frac{X(z)}{z}(z+3)|_{z=-3} = -1$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z+3}$$

$$X(z) = \frac{z}{z-2} - \frac{z}{z+3}$$

第一部分 $\frac{z}{z-2}$ 的极点是 $z=2$, 同时其收敛域包含 $2 < |z| < 3$, 因此该部分的收敛域应为 $|z| > 2$,

该部分的反变换为右边序列 $2^n u(n)$ 。第二部分 $-\frac{z}{z+3}$ 的极点是 $z=-3$, 同时其收敛域包含 $2 < |z| < 3$,

因此该部分的收敛域应为 $|z| < 3$, 该部分的反变换为左边序列 $(-3)^n u(-n-1)$ 。综合以上, 得到 $X(z)$ 的 Z 反变换 $x(n) = 2^n u(n) + (-3)^n u(-n-1)$ 。

要点九: 部分分式法的解题步骤为 (适于 z 为正幂的有理函数):

(1) 首先将 $X(z)$ 除以 z , 得到 $X(z)/z$;

(2) 将上式的分母进行因式分解后再拆成简单的部分分式;

(3) 查表求各分式的反变换;

(4) 收敛域以极点为边界, 总收敛域为各分式收敛域的交集 (各分式的收敛域应包含总收敛域);

(5) 利用线性性质得到最终的反变换。

MATLAB 的 Symbolic Math Toolbox 工具箱提供了求序列 Z 反变换的函数 `iztrans`, 可利用该函数求出 $X(z)$ 的 Z 反变换, 其结果均为因果序列, 举例如下。

【例 2-10】 求下列函数的 Z 反变换: $X_1 = \frac{z}{z-1}$; $X_2 = \frac{z}{(z-a)^2}$; $X_3 = \frac{z(z-1)}{(z+1)^2}$ 。

解: 程序如下:

```
syms n z a
X1=z/(z-1);
x1=iztrans(X1)
X2=z/(z-a)^2;
x2=iztrans(X2)
X3=z*(z-1)/(z+1)^2;
x3=iztrans(X3)
```

运行结果:

```
x1 = 1
x2 = a^n*n/a
x3 = (-1)^(n+2)*(-1)^n*n
```

此外, 也可利用 MATLAB 中的 `residuez` 函数实现有理分式的部分分式展开, 其调用形式为 $[r,p,k]=\text{residuez}(b,a)$ 。其中, b 和 a 分别为用 z^{-1} 表示的 $X(z)$ 的分子和分母多项式系数 (按 z^{-1} 的升幂顺序排列), r 为各分式的系数, p 为各分式的极点。当 $X(z)$ 分母多项式中 z^{-1} 的阶次小于等于分子多项式的阶次时, k 为 z^{-1} 多项式的系数 (按 z^{-1} 升幂顺序排列)。

$$\text{若} \quad X(z) = \frac{r_1}{1-p_1z^{-1}} + \frac{r_2}{1-p_2z^{-1}} + \frac{r_3}{1-p_3z^{-1}} + \frac{r_4}{(1-p_3z^{-1})^2} + k_0 + k_1z^{-1} + k_2z^{-2}$$

则 `residuez` 的返回参数 r 、 p 、 k 分别为

$$\begin{aligned} r &= [r_1 \ r_2 \ r_3 \ r_4] \\ p &= [p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_3] \\ k &= [k_0 \ k_1 \ k_2] \end{aligned}$$

【例 2-11】 已知像函数

$$X(z) = \frac{1+0.976z^{-1}-2.608z^{-2}+1.015z^{-3}-0.154z^{-4}}{1-1.400z^{-1}+0.600z^{-2}-0.072z^{-3}}, \quad |z| > 0.600$$

用 MATLAB 求其部分分式展开式并求其反变换。

解: 程序如下。

```
%部分分式展开
b=[1,0.976,-2.608,1.015,-0.154];
a=[1,-1.400,0.600,-0.072];
[r,p,k]=residuez(b,a);
disp('系数');disp(r)
disp('极点');disp(p)
disp('常数');disp(k)
```

运行的结果为

系数	6.1074	-1.6605	-7.1738
极点	0.6000	0.6000	0.2000
常数	3.7269	2.1389	

部分分式展开的结果为

$$X(z) = \frac{6.1074}{1-0.6z^{-1}} + \frac{-1.6605}{(1-0.6z^{-1})^2} + \frac{-7.1738}{1-0.2z^{-1}} + 3.7269 + 2.1389z^{-1}$$

Z 反变换的结果为

$$x(n) = 6.1074(0.6)^n u(n) - 1.6605(n+1)(0.6)^n u(n) - 7.1738(0.2)^n u(n) + 3.7269\delta(n) + 2.1389\delta(n-1)$$

2. 幂级数展开法（长除法）

因为 $x(n)$ 的 Z 变换为 z^{-1} 幂级数，即

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \cdots + x(-2)z^2 + x(-1)z + x(0)z^0 + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \cdots$$

所以在给定的收敛域内，把 $X(z)$ 展为幂级数，其系数就是序列 $x(n)$ 。

若收敛域为 $|z| > R_{x+}$ ， $x(n)$ 为右边序列，则 $X(z)$ 展开成 z 的负幂级数。

若收敛域为 $|z| < R_{x+}$ ， $x(n)$ 为左边序列，则 $X(z)$ 展开成 z 的正幂级数。

下面举例说明。

【例 2-12】 已知 $X(z) = \frac{z^2}{(4-z)\left(z-\frac{1}{4}\right)}$ ，其收敛域为 $\frac{1}{4} < |z| < 4$ ，用长除法求其 Z 反变换。

解：收敛域为环状，极点 $z = \frac{1}{4}$ 对应因果序列，极点 $z = 4$ 对应左边序列，因此该双边序列可分解

为因果序列和左边序列的和。应先展开成部分分式，再做除法。

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z}{(4-z)\left(z-\frac{1}{4}\right)} = \frac{A_1}{4-z} + \frac{A_2}{z-\frac{1}{4}}$$

$$A_1 = \left[(4-z) \frac{X(z)}{z} \right]_{z=4} = \frac{4}{4-\frac{1}{4}} = \frac{16}{15}$$

$$A_2 = \left[\left(z - \frac{1}{4} \right) \frac{X(z)}{z} \right]_{z=\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{4-\frac{1}{4}} = \frac{1}{15}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{16/15}{4-z} + \frac{1/15}{z-0.25}$$

$$\text{所以 } X(z) = \frac{16}{15} \frac{z}{4-z} + \frac{1}{15} \frac{z}{z-0.25} = \frac{1}{15} \left(\frac{16z}{4-z} + \frac{z}{z-0.25} \right)。$$

$$\begin{array}{r}
 4z + z^2 + \frac{1}{4}z^3 + \frac{1}{16}z^4 + \frac{1}{64}z^5 + \dots \\
 \hline
 4-z \overline{) 16z} \\
 \underline{16z - 4z^2} \\
 4z^2 \\
 \underline{4z^2 - z^3} \\
 z^3 \\
 \underline{z^3 - \frac{1}{4}z^4} \\
 \frac{1}{4}z^4 \\
 \underline{\frac{1}{4}z^4 - \frac{1}{16}z^5} \\
 \frac{1}{16}z^5 \\
 \vdots
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 1 + \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{1}{16}z^{-2} + \frac{1}{64}z^{-3} + \dots \\
 \hline
 z - \frac{1}{4} \overline{) z} \\
 \underline{z - \frac{1}{4}} \\
 \frac{1}{4} \\
 \underline{\frac{1}{4} - \frac{1}{16}z^{-1}} \\
 \frac{1}{16}z^{-1} \\
 \underline{\frac{1}{16}z^{-1} - \frac{1}{64}z^{-2}} \\
 \frac{1}{64}z^{-2} \\
 \underline{\frac{1}{64}z^{-2} - \frac{1}{256}z^{-3}} \\
 \vdots
 \end{array}$$

$$X(z) = \frac{1}{15} \left(\dots \frac{z^5}{64} + \frac{z^4}{16} + \frac{z^3}{4} + z^2 + 4z + 1 + \frac{z^{-1}}{4} + \frac{z^{-2}}{16} + \frac{z^{-3}}{64} + \dots \right)$$

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{15}(4)^{n+2}, & n \leq -1 \\ \frac{1}{15}\left(\frac{1}{4}\right)^n, & n \geq 0 \end{cases} = \frac{1}{15}(4)^{n+2}u(-n-1) + \frac{1}{15}\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$$

3. 留数法

由留数定理可知

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z)z^{n-1}dz = \sum_k \text{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=z_k} \\ \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z)z^{n-1}dz = -\sum_m \text{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=z_m} \end{cases}$$

z_k 为 c 内的第 k 个极点, z_m 为 c 外的第 m 个极点, $\text{Res}[\]$ 表示极点处的留数。

留数的求法如下。

(1) 当 z_r 为一阶极点时的留数为

$$\text{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=z_r} = [(z-z_r)X(z)z^{n-1}]_{z=z_r}$$

(2) 当 z_r 为多重极点时的留数为

$$\text{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=z_r} = \frac{1}{(l-1)!} \frac{d^{l-1}}{dz^{l-1}} [(z-z_r)^l X(z)z^{n-1}]_{z=z_r}$$

【例 2-13】 已知 $X(z) = \frac{z^2}{(4-z)\left(z-\frac{1}{4}\right)}$, 收敛域为 $\frac{1}{4} < |z| < 4$, 用留数法求其 Z 反变换。

解: 收敛域为 $\frac{1}{4} < |z| < 4$, 为便于计算, 可选 c 为单位圆。

$$X(z) \cdot z^{n-1} = \frac{z^{n+1}}{(4-z)\left(z-\frac{1}{4}\right)}$$

(1) 当 $n \geq -1$ 时, $z=0$ 不是 $X(z)z^{n-1}$ 的极点。此时 $X(z)z^{n-1}$ 在 c 内仅有一个一阶极点

$$z_r = \frac{1}{4}$$

因此

$$x(n) = \text{Res}[z^{n+1}/(4-z)]_{z=\frac{1}{4}} = \frac{1}{15} \cdot 4^{-n}, \quad n \geq -1$$

(2) 当 $n \leq -2$ 时, $z=0$ 是 $X(z)z^{n-1}$ 的 $|n+1|$ 阶极点。此时 $X(z)z^{n-1}$ 在 c 内有两个极点, 分别为 $z = \frac{1}{4}$ 和 $z=0$; 而在 c 外仅有一个极点 $z=4$, 因此

$$x(n) = -\text{Res}\left[z^{n+1}/\left(z-\frac{1}{4}\right)\right]_{z=4} = -\frac{1}{15} \cdot 4^{n+2}, \quad n \leq -2$$

综合以上, 得

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{15} 4^{-n}, & n \geq -1 \\ -\frac{1}{15} 4^{n+2}, & n \leq -2 \end{cases}$$

2.5 非周期序列的傅里叶变换及其性质

信号与系统课程中引入了傅里叶变换这一重要的数学工具, 通过学习可知, 在连续系统分析过程中通过计算连续信号的傅里叶变换, 可确定连续信号的频谱分布和频域特性。拉普拉斯变换是傅里叶变换的推广, 而傅里叶变换可以看成是拉普拉斯变换的特例, 因为当拉普拉斯变换中的复变量取 s 平面的虚轴 (令 $s=j\Omega$) 时, 便可得到连续傅里叶变换。

与连续系统分析法对应, 在离散系统分析中也有类似的结论, 若令 Z 变换中的复变量 z 取 z 平面的单位圆 ($z=e^{j\omega}$) 时, 便可得到序列的“离散时间傅里叶变换”, 通常用 DTFT 表示, 或简称为序列傅里叶变换, 并简记为 FT。离散时间傅里叶变换是离散系统分析中重要的数学工具之一, 在离散系统的分析和设计中有着重要的基础作用。

2.5.1 非周期序列的傅里叶变换

非周期序列的离散时间傅里叶变换 (DTFT, 简称 FT) 的定义式为

$$X(e^{j\omega}) = \text{FT}[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad (2-5)$$

需要注意的是, 若傅里叶变换存在, 则要求序列 $x(n)$ 绝对可和, 即 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$, 若序列不满足该条件, 则不能用式 (2-5) 求其傅里叶变换。显然周期序列无法满足该条件, 因此该定义式只适用于

满足绝对可和条件的非周期序列。

非周期序列的离散时间傅里叶反变换的定义式为

$$x(n) = \text{FT}^{-1}[X(e^{j\omega})] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (2-6)$$

注意式(2-6)中的积分区间也可以是其他任意一个长度为 2π 的区间。

要点十：熟记序列傅里叶变换(FT)的定义式和存在条件，同时熟记反变换的定义式。

将 $x(n)$ 和 $X(e^{j\omega})$ 称为一个傅里叶变换对，可以表示为： $x(n) \xrightarrow{\text{FT}} X(e^{j\omega})$ ，其中 $x(n)$ 为原序列，是以 n 为自变量的离散函数，而 $X(e^{j\omega})$ 为频谱函数，是以 $j\omega$ 为自变量的连续复函数。 $X(e^{j\omega})$ 的极坐标表示形式为

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\arg[X(e^{j\omega})]} \quad (2-7)$$

式中， $|X(e^{j\omega})|$ 称为幅频函数，用来表示幅度特性； $\arg X(e^{j\omega})$ 称为相频函数，用来表示相位特性。

【例 2-14】 求 $x(n)=R_6(n)$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 。

解：根据 FT 的定义，有

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_6(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^5 e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j6\omega}}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{e^{-j3\omega} (e^{j3\omega} - e^{-j3\omega})}{e^{-j\frac{1}{2}\omega} (e^{j\frac{1}{2}\omega} - e^{-j\frac{1}{2}\omega})} = e^{-j\frac{5}{2}\omega} \frac{\sin 3\omega}{\sin \frac{1}{2}\omega}$$

用 MATLAB 可方便地计算出序列的傅里叶变换，同时可画出其幅频特性及相频特性，程序如下：

```
N=6;
xn=ones(1,N);
n=0:N-1;
w=linspace(0,2*pi,200);
X=xn*exp(-j*n'*w);
subplot(311),stem(n,xn,'b');
xlabel('n');ylabel('x(n)');
subplot(312),plot(w,abs(X),'r');
xlabel('w');ylabel('幅频特性');
subplot(313),plot(w,angle(X),'k');
xlabel('w');ylabel('相频特性');
```

运行结果如图 2-5 所示。

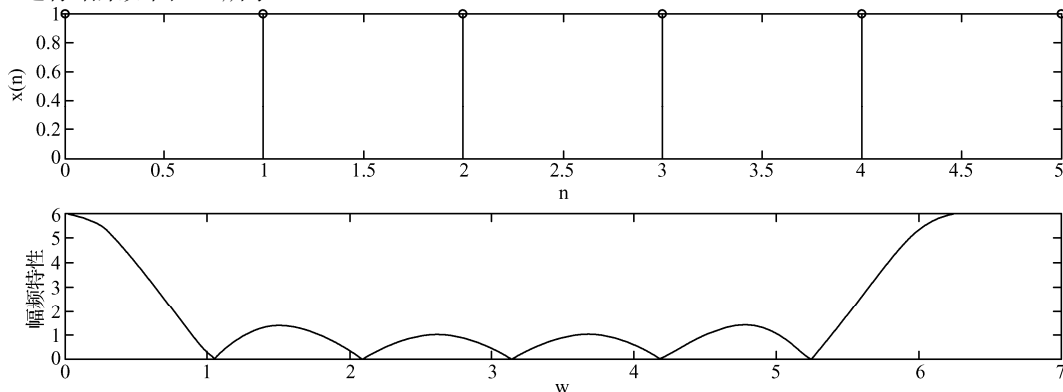
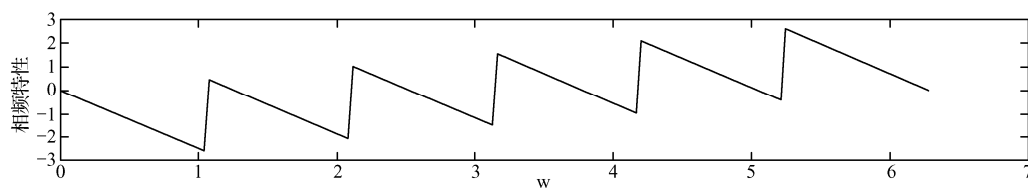


图 2-5 矩形序列 $R_6(n)$ 及其傅里叶变换

图 2-5 矩形序列 $R_6(n)$ 及其傅里叶变换 (续)

这里将常用序列的傅里叶变换对总结为表 2-3, 供读者查阅和使用。

表 2-3 常用序列的傅里叶变换表

序 列	傅里叶变换
$\delta(n)$	1
$a^n u(n) \quad (a < 1)$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$
$R_N(n)$	$e^{-j(N-1)\frac{\omega}{2}} \cdot \sin\left(\frac{\omega N}{2}\right) / \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)$
$u(n)$	$(1 - e^{-j\omega})^{-1} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\omega - 2k\pi)$
$x(n) = 1$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2k\pi)$
$e^{j\omega_0 n} \quad (2\pi/\omega_0 \text{ 为无理数})$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2k\pi)$
$\cos \omega_0 n \quad (2\pi/\omega_0 \text{ 为无理数})$	$\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \omega_0 - 2k\pi) + \delta(\omega + \omega_0 - 2k\pi)]$
$\sin \omega_0 n \quad (2\pi/\omega_0 \text{ 为无理数})$	$-j\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \omega_0 - 2k\pi) + \delta(\omega + \omega_0 - 2k\pi)]$

2.5.2 非周期序列傅里叶变换的性质

非周期序列傅里叶变换有许多重要性质, 读者应熟练掌握。

1. 周期性

$$X[e^{j(\omega+2k\pi)}] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{j(\omega+2k\pi)n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{j\omega n} = X(e^{j\omega})$$

显然序列的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 是周期为 2π 的连续周期函数。

2. 线性

$$\text{设} \quad \text{FT}[x_1(n)] = X_1(e^{j\omega}), \quad \text{FT}[x_2(n)] = X_2(e^{j\omega})$$

则

$$\text{FT}[ax_1(n) + bx_2(n)] = aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$$

3. 时移性质

$$\text{设} \quad \text{FT}[x(n)] = X(e^{j\omega})$$

则

$$\text{FT}[x(n - n_0)] = e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$$

证明:

$$\begin{aligned} \text{FT}[x(n - n_0)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n - n_0)e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n - n_0)e^{-j\omega n} \quad (\text{令 } n' = n - n_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n') e^{-j\omega n'} e^{-j\omega n_0} \\
 &= e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})
 \end{aligned}$$

4. 频移性质

设

$$FT[x(n)] = X(e^{j\omega})$$

则

$$FT[e^{j\omega_0 n} x(n)] = X[e^{j(\omega - \omega_0)}]$$

5. 时域卷积定理

若

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

则

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) H(e^{j\omega})$$

证明: 由卷积和的定义有

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) h(n-m)$$

等式两边做傅里叶变换得

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) h(n-m) \right] e^{-j\omega n}$$

令 $k=n-m$, 则上式可改写为

$$\begin{aligned}
 Y(e^{j\omega}) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) h(k) e^{-j\omega(k+m)} \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-j\omega k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) e^{-j\omega m} = X(e^{j\omega}) H(e^{j\omega})
 \end{aligned}$$

6. 频域卷积定理

若

$$y(n) = x(n) \cdot h(n)$$

则

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) * H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\lambda}) H[e^{j(\omega-\lambda)}] d\lambda$$

7. 对称性

为了研究非周期序列傅里叶变换的对称性, 首先介绍一些有关序列的基本概念。

在数学上, 任意一个序列 $x(n)$ 都可以用共轭对称序列 $x_e(n)$ 和共轭反对称序列 $x_o(n)$ 之和来表示, 即

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n) \quad (2-8)$$

序列 $x_e(n)$ 为共轭对称序列, 也称为 $x(n)$ 的共轭对称分量, 它满足

$$x_e(n) = x_e^*(-n) \quad (2-9)$$

序列 $x_o(n)$ 为共轭反对称序列, 也称为 $x(n)$ 的共轭反对称分量, 它满足

$$x_o(n) = -x_o^*(-n)$$

对实序列而言, 有 $x_e(n) = x_e^*(-n)$, $x_o(n) = -x_o^*(-n)$, 即序列 $x_e(n)$ 为偶对称序列, $x_o(n)$ 为奇对称序列。

根据共轭对称序列与共轭反对称序列的定义, 任意序列的共轭对称分量 $x_e(n)$ 和共轭反对称分量 $x_o(n)$ 可由该任意 $x(n)$ 按式 (2-10) 和式 (2-11) 构成。

$$x_e(n) = \frac{1}{2} [x(n) + x^*(-n)] \quad (2-10)$$

$$x_o(n) = \frac{1}{2} [x(n) - x^*(-n)] \quad (2-11)$$

同样道理, 频谱函数 $X(e^{j\omega})$ 也可分解为共轭对称分量和共轭反对称分量这两种分量之和。

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega}) \quad (2-12)$$

其中, 共轭对称分量为

$$X_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})] \quad (2-13)$$

共轭反对称分量为

$$X_o(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})] \quad (2-14)$$

根据傅里叶变换的定义有

$$X(e^{j\omega}) = \text{FT}[x(n)] = \sum x(n)e^{-j\omega n} \quad (2-15)$$

因此, 对式(2-15)的 ω 取负

$$X(e^{-j\omega}) = \sum x(n)e^{j\omega n} \quad (2-16)$$

再取共轭

$$X^*(e^{-j\omega}) = \left[\sum x(n)e^{j\omega n} \right]^* = \sum x^*(n)[e^{j\omega n}]^* = \sum x^*(n)e^{-j\omega n} \quad (2-17)$$

若 $x(n)$ 为实序列, $x(n)=x^*(n)$, 得到

$$X^*(e^{-j\omega}) = \sum x(n)e^{-j\omega n} = X(e^{j\omega}) \quad (2-18)$$

由以上的推导过程看出, 实序列(或复序列的实部)的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 为共轭对称函数。同理可证, 纯虚序列(或复序列的虚部乘以 j)的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 为共轭反对称函数。

复序列 $x(n)=x_R(n)+jx_I(n)$, $x_R(n)$ 为实分量, $jx_I(n)$ 为纯虚分量, 由上述推导可知: 对 $x_R(n)$ 和 $jx_I(n)$ 分别做傅里叶变换后, 应各自得到共轭对称函数 $X_e(e^{j\omega})$ 和共轭反对称函数 $X_o(e^{j\omega})$, 即 $\text{FT}[x_R(n)]=X_e(e^{j\omega})$; $\text{FT}[jx_I(n)]=X_o(e^{j\omega})$, 再根据线性性质, 这两部分的和应为 $x(n)$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 。

同理, 序列 $x(n)$ 的共轭对称分量 $x_e(n)$ 和共轭反对称分量 $x_o(n)$ 的傅里叶变换分别等于序列的傅里叶变换的实部和 j 乘以虚部, 即

$$\text{FT}[x_e(n)] = X_R(e^{j\omega})$$

$$\text{FT}[x_o(n)] = jX_I(e^{j\omega})$$

要点十一: 实分量对应共轭对称分量, 纯虚分量对应共轭反对称分量。

若 $x(n)$ 是实序列, 则其频谱函数满足共轭对称性, 即

$$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$$

也就是说

$$X_R(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega})$$

$$X_I(e^{j\omega}) = -X_I(e^{-j\omega})$$

由此可以看出, 实序列的傅里叶变换的实部是偶函数, 而虚部是奇函数。

8. 帕斯瓦尔(Parseval)定理

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

将序列傅里叶变换的性质总结为表2-4, 供读者查阅和使用。

表2-4 序列傅里叶变换(FT)的性质

序 列	傅里叶变换	序 列	傅里叶变换
$x(n)$	$X(e^{j\omega})$	$x(n-n_0)$	$e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$
$x^*(n)$	$X^*(e^{-j\omega})$	$x(-n)$	$X(e^{-j\omega})$

续表

序 列	傅里叶变换	序 列	傅里叶变换
$ax_1(n)+bx_2(n)$	$aX_1(e^{j\omega})+bX_2(e^{j\omega})$	$nx(n)$	$j\left[\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}\right]$
$x_1(n)*x_2(n)$	$X_1(e^{j\omega}) \cdot X_2(e^{j\omega})$	$x_1(n) \cdot x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi} X_1(e^{j\omega}) * X_2(e^{j\omega})$
$X_R(n)$	$X_e(e^{j\omega})$	$jx(n)$	$X_o(e^{j\omega})$
$X_e(n)$	$X_R(e^{j\omega})$	$x_o(n)$	$jX_i(e^{j\omega})$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) ^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) ^2 d\omega$		$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega$	

【例 2-15】若 $x(n)$ 的傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})$, 求以下序列的傅里叶变换。

(1) $ax(n)$ (a 为常数)

(2) $x(n-100)$

(3) $x^*(n)$

(4) $y(n) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{2}\right), & n \text{ 为偶数} \\ 0, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$

解: 根据序列傅里叶变换的定义及性质, 有:

(1) $ax(n) \longleftrightarrow aX(e^{j\omega})$

(2) $x(n-100) \longleftrightarrow e^{-j100\omega} X(e^{j\omega})$

(3) $x^*(n) \longleftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)e^{-jn\omega} = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{jn\omega} \right]^* = X^*(e^{-j\omega})$

(4) $Y(e^{j\omega}) = \sum_{n \text{ 为偶数}} x\left(\frac{n}{2}\right)e^{-jn\omega} \stackrel{\text{令 } n=2m}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(m)e^{-j2m\omega} = X(e^{j2\omega})$

【例 2-16】若序列 $h(n)$ 是实因果序列, $h(0)=1$, 其傅里叶变换的虚部为 $H_i(e^{j\omega}) = -\sin\omega$ 。求序列 $h(n)$ 及其傅里叶变换 $H(e^{j\omega})$ 。

解: 利用三角函数关系得 $H_i(e^{j\omega}) = -\sin\omega = \frac{1}{2j}(e^{-j\omega} - e^{j\omega})$

$$jH_i(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}(e^{-j\omega} - e^{j\omega})$$

由序列傅里变换的定义有 $jH_i(e^{j\omega}) = \text{FT}[h_o(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_o(n)e^{-jn\omega}$ 。比较两式可得

$$h_o(-1) = -\frac{1}{2}, \quad h_o(0) = 0, \quad h_o(1) = \frac{1}{2}$$

由于 $h(n)$ 是实序列, 因此 $h(n) = h^*(n)$; 又因为 $h(n)$ 是因果的, 所以当 $n < 0$ 时, $h(n) = 0$ 。根据以上结论得到: 当 $n > 0$ 时, $h_o(n) = \frac{1}{2}[h(n) - h^*(-n)] = \frac{1}{2}[h(n) - h(-n)] = \frac{1}{2}h(n)$ 。

综合以上得到

$$h(n) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n = 0 \\ 2h_o(n), & n > 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 1, & n = 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

因此, $H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-jn\omega} = 1 + e^{-j\omega} = 2\cos\frac{\omega}{2}e^{-j\frac{\omega}{2}}$ 。

2.6 序列的傅里叶变换、Z变换和拉普拉斯变换的关系

2.6.1 序列 $x(n)$ 的傅里叶变换与序列 $x(n)$ 的 Z 变换之间的关系

前面已经提到, 当 Z 变换中的复变量 z 取 z 平面的单位圆, 即当 $z = e^{j\omega}$ 时, 便得到序列的傅里叶变换, 因此可以认为序列的傅里叶变换是单位圆上的 Z 变换。

$$X(z) = ZT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

$$X(e^{j\omega}) = FT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

显然 $X(z)|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega})$ 。

2.6.2 序列的 Z 变换与拉普拉斯变换之间的关系

设连续时间信号为 $x_a(t)$, 其拉普拉斯变换为

$$X_a(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t)e^{-st} dt$$

$x_a(t)$ 经理想抽样后的抽样信号为 $\hat{x}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\delta(t - nT)$, 其拉普拉斯变换为

$$\begin{aligned}\hat{X}_a(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}_a(t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\delta(t - nT)e^{-st} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_a(nT)\delta(t - nT)e^{-st} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)e^{-snT}\end{aligned}$$

$x_a(nT)$ 为 $x_a(t)$ 离散化后的抽样序列, 令 $x_a(nT) = x(n)$, 则其 Z 变换为

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

比较上述两式, 可得出结论: 当 $z = e^{sT}$ 时, 抽样序列的 Z 变换就等于其理想抽样信号的拉普拉斯变换, 即

$$\hat{X}_a(s) = X(z)|_{z=e^{sT}} \quad (2-19)$$

这两种变换之间的关系是由复变量从 s 平面到 z 平面的映射, 其映射关系为

$$\begin{aligned}z &= e^{sT} \\ s &= \sigma + j\Omega \\ z = re^{j\omega} &= e^{(\sigma + j\Omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\Omega T} \\ \begin{cases} r = e^{\sigma T} \\ \omega = \Omega T \end{cases}\end{aligned}$$

(1) σ 到 r 的映射关系 (如图 2-6 所示)

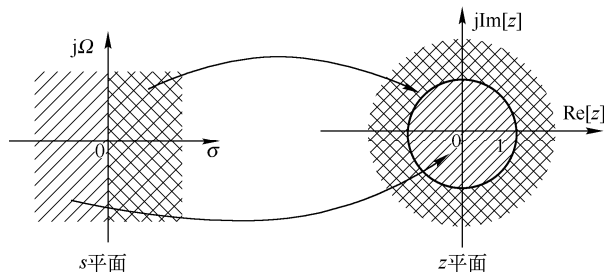
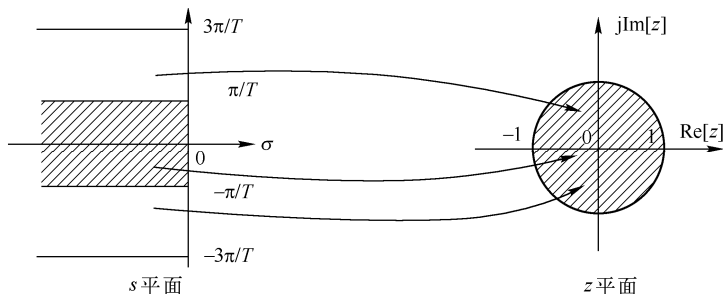
当 $\sigma = 0$ (s 平面的虚轴) 时, $r = 1$ (z 平面单位圆上);

当 $\sigma < 0$ (s 左半平面) 时, $r < 1$ (z 平面单位圆内部);

当 $\sigma > 0$ (s 右半平面) 时, $r > 1$ (z 平面单位圆外部)。

(2) 从模拟频率 Ω 到数字频率 ω 的映射 (如图 2-7 所示)

当 $\Omega = 0$ (s 平面的实轴) 时, $\omega = 0$ (z 平面正实轴), 当 Ω 取值从 $-\frac{\pi}{T}$ 到 $\frac{\pi}{T}$ 时, ω 取值由 $-\pi$ 增大至 π 。

图 2-6 从 σ 到 r 的映射图 2-7 s 平面与 z 平面的多值映射关系

s 平面上宽度为 $\frac{2\pi}{T}$ 的水平带映射到整个 z 平面。同样, 每当 Ω 增大一个抽样角频率 $\Omega_s = \frac{2\pi}{T}$, 则 ω 的响应增加 2π 。即在 z 平面重复旋转一周, 因此, s 平面到 z 平面的映射是多值映射。

从映射关系上可以看出, 对时域信号抽样, 则是在 S 域沿 $j\Omega$ 轴的周期延拓。因此经过时域抽样后, 拉普拉斯变换为

$$\hat{X}_a(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a(s - jk\Omega_s) \quad (2-20)$$

将式 (2-20) 代入式 (2-19), 可得连续时间信号 $x_a(t)$ 的拉普拉斯变换 $X_a(s)$ 与抽样序列 $x(n)$ 的 Z 变换 $X(z)$ 之间的关系为

$$X(z)|_{z=e^{sT}} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(s - jk\Omega_s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(s - j\frac{2\pi}{T}k\right) \quad (2-21)$$

2.6.3 连续信号 $x_a(t)$ 的傅里叶变换 $X_a(j\Omega)$ 与序列 $x(n)$ 的 Z 变换 $X(z)$ 之间的关系

由于傅里叶变换是拉普拉斯变换在虚轴上的特例, 即 $s = j\Omega$, 映射到 z 平面上是单位圆。

将 $s = j\Omega$ 代入 $z = e^{sT}$, 可得到从傅里叶变换到 Z 变换的映射关系为

$$z = e^{sT}|_{s=j\Omega} = e^{j\Omega T} \quad (2-22)$$

将式 (2-22) 代入式 (2-21), 可得到傅里叶变换与 Z 变换的关系为

$$X(z)|_{z=e^{j\Omega T}} = X(e^{j\Omega T}) = \hat{X}_a(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(j\Omega - j\frac{2\pi}{T}k\right) \quad (2-23)$$

2.7 离散系统的系统函数和变换域分析

连续系统分析可以借助傅里叶变换和拉普拉斯变换这样的数学工具, 分别称为频域分析和 S 域分析。类似地, 在离散系统分析中, 同样也可以借助傅里叶变换和 Z 变换, 分别称为频域分析和 Z 域分析。

析。首先介绍几个重要的基本概念。

2.7.1 频率响应和系统函数

若线性移不变系统的单位抽样响应为 $h(n)$ ，则系统的零状态响应 $y(n)$ 应为激励 $x(n)$ 与单位抽样响应 $h(n)$ 的卷积（为与第3章的“循环卷积”区别，此处的卷积可称为“线性卷积”），即

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

由傅里叶变换和 Z 变换的卷积定理，分别得到

$$Y(z) = X(z) \cdot H(z)$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega})$$

关系框图如图 2-8 所示。

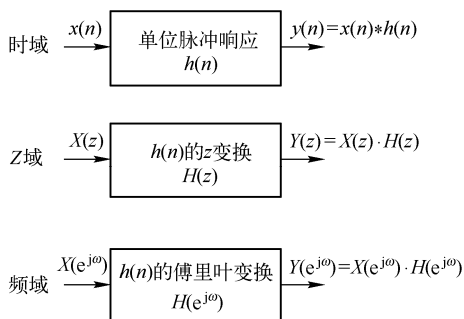


图 2-8 LSI 离散系统激励与响应关系框图

$H(z) = ZT[h(n)] = \frac{Y(z)}{X(z)}$ 称为 LSI 离散系统的系统函数。

$H(e^{j\omega}) = FT[h(n)] = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$ 称为 LSI 离散系统的频率响应函数，简称频率响应。

要点十二： 熟记频率响应和系统函数的定义式。

2.7.2 系统函数、频率响应和差分方程的关系

线性移不变系统的数学模型常用差分方程表示（通常 $N \geq M$ ）：

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{m=0}^M b_m x(n-m)$$

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{m=0}^M b_m z^{-m} X(z)$$

取 Z 变换得

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

对上式进行因式分解得

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = K \frac{\prod_{m=1}^M (1 - c_m z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})} \quad (K = b_0/a_0)$$

再根据傅里叶变换与 Z 变换的关系, 得

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = K \frac{\prod_{m=1}^M (1 - c_m z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})} \Big|_{z=e^{j\omega}} = K \frac{\prod_{m=1}^M (1 - c_m e^{-j\omega})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k e^{-j\omega})}$$

【例 2-17】 设某离散 LSI 因果系统的差分方程为 $y(n)=x(n)+cy(n-1)$, 求该系统的系统函数 $H(z)$ 和单位脉冲响应 $h(n)$, 并求当 $|c|<1$ 时系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 。

解: 对差分方程两边取 Z 变换, 并利用双边 Z 变换的移位定理可得

$$Y(z) = X(z) + cz^{-1}Y(z)$$

$$Y(z)(1 - cz^{-1}) = X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - cz^{-1}}$$

因该系统为因果系统, 故单位脉冲响应 $h(n)$ 为因果序列, 所以系统函数 $H(z)$ 的收敛域为 $|z|>|c|$ 。查表 2-1, 可求得 $H(z)$ 的 Z 反变换, 即为系统的单位脉冲响应 $h(n) = c^n u(n)$ 。

当 $|c|<1$ 时, $h(n)$ 绝对可和, 其傅里叶变换即为系统的频率响应。

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{1 - ce^{-j\omega}}$$

【例 2-18】 某离散线性移不变 (LSI) 系统, 当激励 $x(n)=u(n)$ 时, 系统的零状态响应为 $y(n) = [2 - 0.5^n + (-1.5)^n]u(n)$, 求系统函数 $H(z)$ 并确定系统的差分方程, 并利用 MATLAB 求频率响应的幅频特性曲线。

解: 分别求激励 $x(n)$ 和零状态响应 $y(n)$ 的 Z 变换

$$X(z) = \text{ZT}[u(n)] = \frac{z}{z-1}$$

$$\begin{aligned} Y(z) &= \text{ZT}[y(n)] = \frac{2z}{z-1} - \frac{z}{z-0.5} + \frac{z}{z-(-1.5)} \\ &= \frac{z(2z^2 + 0.5)}{(z-1)(z-0.5)(z+1.5)} \end{aligned}$$

根据系统函数的定义, 得

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2z^2 + 0.5}{z^2 + z - 0.75} = \frac{2 + 0.5z^{-2}}{1 + z^{-1} - 0.75z^{-2}}$$

由差分方程与系统函数的对应关系可求得系统的差分方程为

$$y(n) + y(n-1) - 0.75y(n-2) = 2x(n) + 0.5x(n-2)$$

用 MATLAB 求幅频特性曲线的程序如下:

```
b=[2 0 0.5]
a=[1 1-0.75]
w=linspace(0,pi,512)
H=freqz(b,a,w)
plot(w/pi,abs(H))
ylabel('幅度')
```

```
xlabel('Normalized frequency')
```

运行结果如图 2-9 所示。

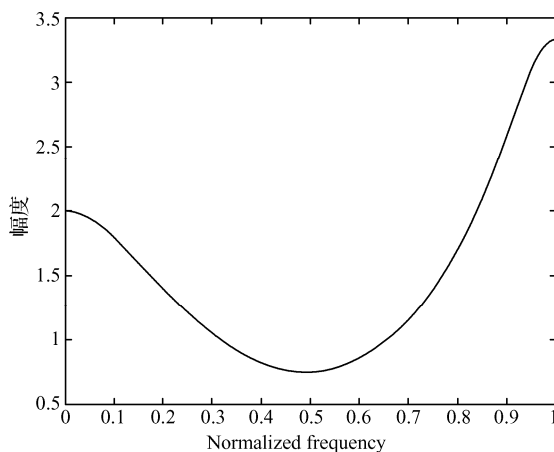


图 2-9 幅频特性曲线

2.7.3 系统函数与系统稳定因果性的关系

从第 1 章可以知道, 线性移不变系统具有因果性的条件是该系统的单位脉冲响应 $h(n)$ 为因果序列: 即当 $n < 0$ 时, $h(n) = 0$ 。因此对单位脉冲响应 $h(n)$ 进行 Z 变换后, 得到系统函数 $H(z)$, 其收敛域应为 z 平面上某圆的外侧区域, 亦即收敛域为 $R_x < |z| \leq \infty$ 。而收敛域内不能含有 $H(z)$ 的极点, 所以因果系统的系统函数 $H(z)$ 的所有极点都应在 z 平面上某圆的内侧区域。

另外, 线性移不变系统具有稳定性的条件是该系统的单位脉冲响应 $h(n)$ 具有绝对可和的条件, 即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

根据序列 FT 存在的条件可以知道, 此时系统的单位脉冲响应 $h(n)$ 的傅里叶变换是存在的, 而傅里叶变换是 z 平面单位圆上的 Z 变换。因此, 稳定系统的单位脉冲响应 $h(n)$ 在单位圆上收敛, 或者说稳定系统的系统函数 $H(z)$ 的收敛域应包含单位圆 ($|z|=1$)。

综合以上两点可以得出以下结论, 一个既因果又稳定的 LSI 离散系统, 其系统函数 $H(z)$ 的全部极点均位于单位圆的内部。或表示为 ROC: $R_x < 1 \leq |z| \leq \infty$ 。

要点十三: LSI 离散系统因果稳定性的条件: 系统函数 $H(z)$ 的全部极点均位于单位圆内。

【例 2-19】 已知 LSI 离散系统的系统函数为 $H(z) = \frac{z^2}{(z-0.6)(z-3)}$, 试分析其因果性和稳定性。

解: $H(z)$ 的两个极点为 $z_1 = 0.6$ 和 $z_2 = 3$, 先确定收敛域的可能情况, 由于 Z 变换的收敛域内不可有极点且以极点为边界, 因此 $H(z)$ 的收敛域可分为以下三种情况。

(1) 当收敛域为 $3 < |z| \leq \infty$ 时, 该系统为因果系统, 但收敛域不包含单位圆, 因此是不稳定系统, 其单位脉冲响应 $h(n) = [1.25 \cdot (3)^n - 0.25 \cdot (0.6)^n]u(n)$, 这是一个因果且不收敛的序列。

(2) 当收敛域为 $0.6 < |z| < 3$ 时, 该系统为非因果系统, 而收敛域包含单位圆, 因此是稳定系统, 其单位脉冲响应 $h(n) = -0.25 \cdot (0.6)^n u(n) - 1.25 \cdot (3)^n u(-n-1)$, 这是一个收敛的双边序列。

(3) 当收敛域为 $|z| < 0.6$ 时, 该系统为非因果系统, 而收敛域不包含单位圆, 因此是不稳定系统, 其单位脉冲响应 $h(n) = [-0.25 \cdot (0.6)^n - 1.25 \cdot (3)^n]u(-n-1)$, 这是一个非因果序列, 且不收敛。

2.8 离散系统的基本网络结构

2.8.1 离散系统的方框图表示

时域离散系统一般用差分方程或系统函数进行描述。系统的输入 $x(n]$ 和输出 $y(n]$ 服从 N 阶差分方程

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{m=0}^M b_m x(n-m), \quad \text{系统函数为 } H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (\text{通常 } N \geq M).$$

系统对信号进行处理的过程实际上是一种运算过程,在这一过程中,将一组输入的数字序列 $x(n]$ 通过一定的运算后转变为另一组输出的数字序列 $y(n]$, 完成了对输入信号的处理,从而达到提取有用信息并加以利用的目的。

系统对数字信号进行处理的过程包含三种最基本的算法,即加法、乘法和移位,它们的方框图如图 2-10 (a) 所示。通常为了简化,还可以将运算框图转换为更简洁的信号流图形式,如图 2-10 (b) 所示。

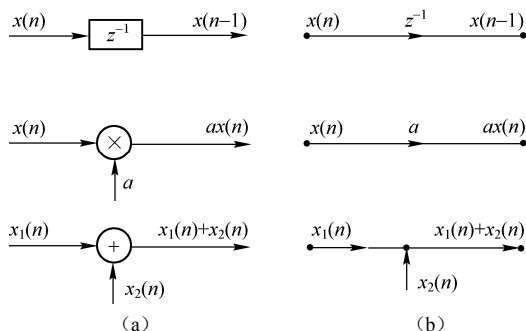


图 2-10 基本运算单元的框图和流图

对于同一个系统函数 $H(z)$, 可实现的算法有很多种, 每一种算法对应于一种不同的运算结构 (网络结构), 例如, 某系统的系统函数为 $H_1(z) = \frac{1}{1+z^{-1}-56z^{-2}}$, 该系统又可表示为

$$H_2(z) = \frac{1}{1+7z^{-1}} \cdot \frac{1}{1-8z^{-1}}$$

或

$$H_3(z) = \frac{7/15}{1+7z^{-1}} + \frac{8/15}{1-8z^{-1}}$$

即

$$H_1(z) = H_2(z) = H_3(z)$$

它们是同一个系统, 但明显具有不同的算法, 而具体的算法可用网络结构图来表示, 因此网络结构实际表示的是一种运算结构。不同网络结构的运算复杂程度、运算速度及运算误差是不同的, 如何选用合适的网络结构来实现运算, 是数字信号处理研究的重要内容。

通常可以把 LSI 离散系统称为数字滤波器, 根据网络结构的不同特点, 又可以将数字滤波器分成两类: 无限长脉冲响应 (IIR) 型数字滤波器和有限长脉冲响应 (FIR) 型数字滤波器。两者的区别如表 2-5 所示。

表 2-5 FIR 型与 IIR 型数字滤波器的对比

系统类型	FIR	IIR
信号流程图	无反馈回路 (非递归结构)	有反馈回路 (递归结构)
差分方程	$y(n) = \sum_{m=0}^M b_m x(n-m)$	$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{m=0}^M b_m x(n-m)$
系统函数	$H(z) = \sum_{m=0}^M b_m z^{-m}$	$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$
$h(n)$	有限长度	无限长度
极点	$z=0$	极点位置不定
稳定性	永远稳定	系统有可能不稳定

2.8.2 无限长单位脉冲响应 (IIR) 滤波器基本网络结构

IIR 型数字滤波器的基本网络结构主要有直接型、级联型和并联型。

1. 直接型

(1) 直接 I 型

IIR 滤波器的差分方程用以下形式进行描述

$$y(n) = \sum_{m=0}^M b_m x(n-m) + \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$$

从这个差分方程表达式可以看出, 系统的输出 $y(n)$ 由两部分构成:

① 第一部分 $\sum_{m=0}^M b_m x(n-m)$ 是一个对输入 $x(n)$ 的 M 阶延时链结构, 每阶延时抽头后加权相加, 构成一个横向结构网络;

② 第二部分 $\sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$ 是一个对输出 $y(n)$ 的 N 阶延时链的横向结构网络, 是由输出到输入的反馈网络。

由这两部分相加构成输出, 取 $M=N$, 可得 IIR 直接 I 型结构图, 如图 2-11 所示。

直接 I 型的优点是结构简单、清晰, 缺点是所用运算单元多; 延时支路较多; 常数对滤波器的性能控制作用不明显; 零、极点关系不明显, 调整困难。

以 $N=2$ 为例, 显然整个结构图共需 $2N=4$ 个延时单元, 如图 2-12 所示。

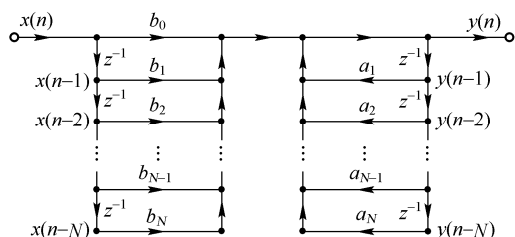


图 2-11 IIR 直接 I 型结构图

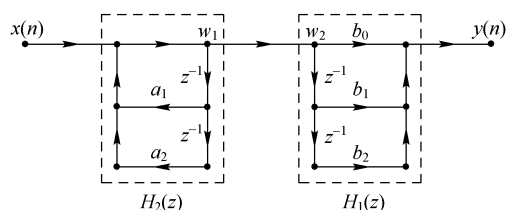


图 2-12 二阶 IIR 系统的直接 I 型结构图

(2) 直接 II 型

为改善直接 I 型结构运算单元较多的缺点, 可对该结构进行调整, 以图 2-12 为例, 由于节点变量 $w_1 = w_2$, 因此前后两部分延时支路可以合并, 得到如图 2-13 所示的 IIR 直接 II 型结构图。

直接 II 型同样具有结构简单、清晰的优点, 同时该结构所用的延时支路比直接 I 型减少一半。但直接 II 型也具有如下缺点: 系数对滤波器的性能控制作用不明显; 零、极点关系不明显, 调整困难; 系数量化效应敏感度高。

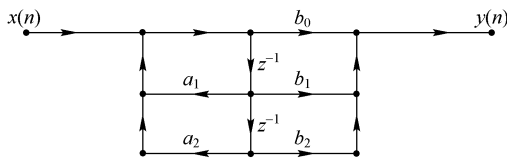


图 2-13 二阶 IIR 直接 II 型结构图

观察图 2-13, 可总结出 IIR 直接 II 型结构图的画法, 详见要点十四。

要点十四: 直接 II 型结构图的画法。

1. 系统函数要化为负幂次有理分式, 且分母常数项系数为 1, 其他项为 $-a_i$ 的形式。
2. 差分方程要化为后向差分方程, 左边只有一项 $y(n)$, 且其系数为 1。
3. 可以根据差分方程或系统函数画信号流图, 其前向支路的系数就是系统函数 (或差分方程) 中的系数 b_i 。
4. 后向支路的系数就是系统函数 (或差分方程) 中的系数 a_i 。
5. 注意空缺项, 在画信号流图时标出对应系数为零或断开该支路。
6. 若某一支路的系数为 1, 则可省略不写。

【例 2-20】 已知 IIR 数字滤波器的系统函数 $H(z) = \frac{8-4z^{-1}+11z^{-2}-2z^{-3}}{1-\frac{5}{4}z^{-1}+\frac{3}{4}z^{-2}-\frac{1}{8}z^{-3}}$, 画出该滤波器的直接 II 型结构图。

解: 由系统函数 $H(z)$ 可推出系统的差分方程如下:

$$y(n) = \frac{5}{4}y(n-1) - \frac{3}{4}y(n-2) + \frac{1}{8}y(n-3) + 8x(n) - 4x(n-1) + 11x(n-2) - 2x(n-3)$$

按照要点十四, 可画出其直接 II 型网络结构图, 如图 2-14 所示。

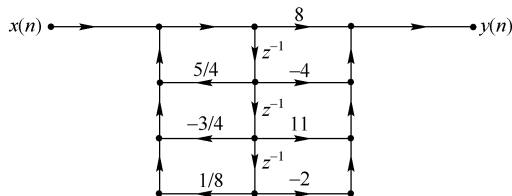


图 2-14 IIR 直接 II 型结构举例

2. 级联型

将 N 阶 IIR 数字滤波器的系统函数 $H(z)$ 的分子和分母分别进行因式分解

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = A \frac{\prod_{m=1}^M (1 - c_m z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}$$

再将 $H(z)$ 写成多个因式 $H_j(z)$ 连乘积的形式 $H(z) = A \prod_{j=1}^L H_j(z)$ 。

这里, 每个 $H_j(z)$ 均为实系数的二阶 IIR 数字网络, 即 $H_j(z) = \frac{\beta_{0j} + \beta_{1j}z^{-1} + \beta_{2j}z^{-2}}{1 - \alpha_{1j}z^{-1} - \alpha_{2j}z^{-2}}$ 。

这里每个 $H_i(z)$ 都是 $H(z)$ 的子系统, 均可采用直接 II 型结构实现, 最后把各子系统依次级联, 则可得到系统函数 $H(z)$ 的级联型结构, 如图 2-15 所示。

IIR 级联型结构的优点是所需存储器最少, 系统结构组成灵活; 每个一阶网络决定一个零点、一个极点, 每个二阶网络决定一对零点、一对极点。调整一阶网络和二阶网络系数可以改变零、极点的位置, 所以零、极点调整方便, 便于调整系统的频率响应。

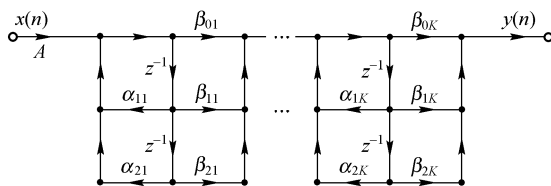


图 2-15 IIR 级联型结构图

该结构的缺点是存在误差积累（但在级联型结构中，后面的网络输出不会传送到前面，所以运算误差的积累相对于直接型要小），另外级联型结构的零、极点配合关系存在着网络最优化的问题，因而最佳配合关系不易确定。

【例 2-21】 已知 IIR 数字滤波器的系统函数如下，画出该滤波器的级联型结构图。

$$H(z) = \frac{8 - 4z^{-1} + 11z^{-2} - 2z^{-3}}{1 - \frac{5}{4}z^{-1} + \frac{3}{4}z^{-2} - \frac{1}{8}z^{-3}}$$

$$\text{解: } H(z) = \frac{(2 - 0.379z^{-1})(4 - 1.24z^{-1} + 5.264z^{-2})}{(1 - 0.25z^{-1})(1 - z^{-1} + 0.5z^{-2})} = \frac{2 - 0.379z^{-1}}{1 - 0.25z^{-1}} \cdot \frac{4 - 1.24z^{-1} + 5.264z^{-2}}{1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$

该滤波器的级联型结构图如图 2-16 所示。

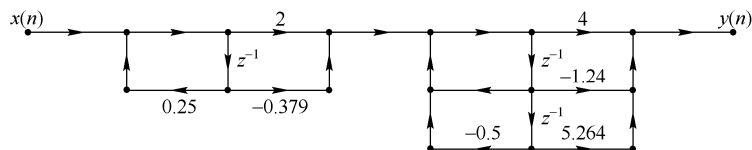


图 2-16 IIR 级联型结构图举例

借助 MATLAB 的 tf2sos 函数可以将直接型结构转换为级联型结构，程序如下：

```
b=[8,-4,11,-2]
a=[1,-5/4,3/4,-1/8]
[sos,g]=tf2sos(b,a)
```

运行结果：

```
sos =1.0000    -0.1900         0    1.0000    -0.2500         0
      1.0000    -0.3100    1.3161    1.0000    -1.0000    0.5000
g =8
```

根据 MATLAB 对 sos 矩阵的定义，可写出系统函数的二次分式连乘形式，即为级联型。

$$H(z) = 8 \cdot \frac{1 - 0.19z^{-1}}{1 - 0.25z^{-1}} \cdot \frac{1 - 0.31z^{-1} + 1.3161z^{-2}}{1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}} = \frac{2 - 0.38z^{-1}}{1 - 0.25z^{-1}} \cdot \frac{4 - 1.24z^{-1} + 5.264z^{-2}}{1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$

与前面结果相同。

3. 并联型

将系统函数 $H(z)$ 展成部分分式形式，便可得到 IIR 并联型结构，即

$$H(z) = A_0 + H_1(z) + H_2(z) + \cdots + H_N(z) = A_0 + \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{1 - d_i z^{-i}}$$

$$H(z) = A_0 + \sum_{i=1}^E \frac{A_i}{1 - p_i z^{-1}} + \sum_{i=1}^F \frac{\gamma_{0i} + \gamma_{1i} z^{-1}}{1 - \alpha_{1i} z^{-1} - \alpha_{2i} z^{-2}}$$

IIR 并联型结构如图 2-17 所示。

并联型结构的优点是所需存储器最少；各级误差互不影响，所以无误差积累；极点调整方便，所以在要求准确传输极点的场合宜采用这种结构。并联型结构的缺点是零点调整不方便，另外当 $H(z)$ 有多阶极点时，由于计算复杂，因此很难展开成部分分式的形式。

【例 2-22】 已知 IIR 数字滤波器的系统函数，画出该滤波器的并联型结构。

$$H(z) = \frac{8 - 4z^{-1} + 11z^{-2} - 2z^{-3}}{1 - \frac{5}{4}z^{-1} + \frac{3}{4}z^{-2} - \frac{1}{8}z^{-3}}$$

解： $H(z) = 16 + \frac{8}{1 - 0.5z^{-1}} + \frac{-16 + 20z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}}$

该滤波器的并联型结构如图 2-18 所示。

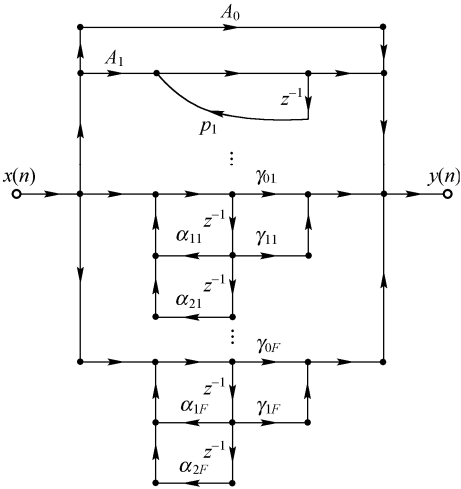


图 2-17 IIR 并联型结构图

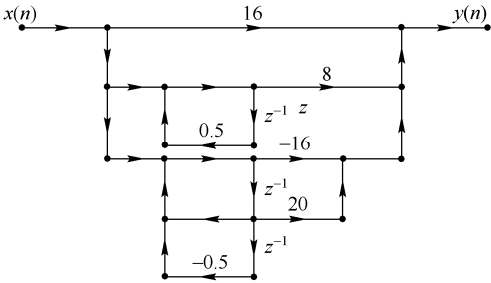


图 2-18 IIR 并联型结构图举例

IIR 型滤波器的三种基本结构为直接型、级联型及并联型，表 2-6 所示为各基本结构的主要特点。

表 2-6 IIR 滤波器各基本网络结构特点的比较

类 型	直 接 型	级 联 型	并 联 型
零、极点调节	不能直接调节	零、极点单独调节	极点单独调节
运算误差	较大	相对直接型小	最小
运算速度	一般	一般	最快

2.8.3 有限长单位脉冲响应（FIR）滤波器基本网络结构

FIR 网络结构的特点是没有反馈支路（结构图中不存在环路），其单位脉冲响应是有限长的。设 FIR 数字滤波器的单位脉冲响应为 $h(n)$ ，长度为 N ，其系统函数 $H(z)$ 为 $H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$ 。

而其差分方程为

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m) = h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + \cdots + h(N-1)x(n-N+1)$$

FIR 滤波器的基本结构分为直接型和级联型两种, 下面分别介绍。

1. 直接型

直接型又称为卷积型、横截型或横向型, 是直接按 $H(z)$ 或差分方程画出没有反馈支路的结构图, 如图 2-19 所示。

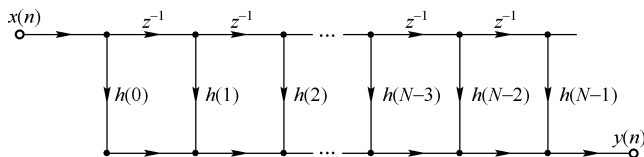


图 2-19 FIR 直接型结构

2. 级联型

若将系统函数 $H(z)$ 分解成实系数二阶因式联乘的形式, 可得到

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \prod_{j=1}^{\lceil \frac{N}{2} \rceil} (\beta_{0j} + \beta_{1j}z^{-1} + \beta_{2j}z^{-2})$$

将其中的每个因式都用直接型结构实现并依次连接, 便可得到 FIR 级联型结构, 如图 2-20 所示。

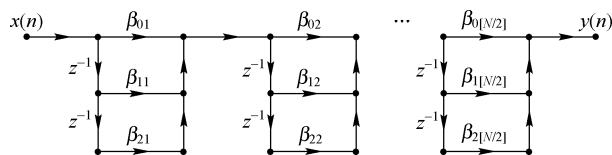


图 2-20 FIR 级联型结构

【例 2-23】 设 FIR 数字滤波器的系统函数 $H(z) = 0.96 + 2.0z^{-1} + 2.8z^{-2} + 1.5z^{-3}$, 试画出该系统的级联型和直接型结构。

解: 将 $H(z)$ 进行因式分解, 得到

$$H(z) = (0.6 + 0.5z^{-1}) \cdot (1.6 + 2z^{-1} + 3z^{-2})$$

该系统的级联型结构如图 2-21 (a) 所示, 直接型结构如图 2-21 (b) 所示。

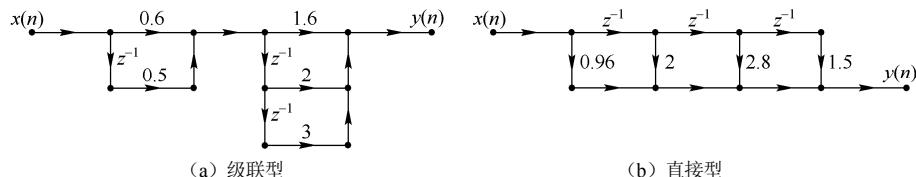


图 2-21 FIR 级联型和直接型结构的举例

3. 频率抽样型结构

有限长序列 $h(n)$ 的 Z 变换为 $H(z)$, 对其进行单位圆上的 N 点等间隔抽样, 得到长度为 N 的序列 $H(k)$, 即 $H(k) = H(z)|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, N-1$)。则 $H(z)$ 可由这 N 个抽样值来确定

$$H(z) = (1 - z^{-N}) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - e^{j\frac{2\pi k}{N}} z^{-1}} = (1 - z^{-N}) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$

整个系统可看成由两部分级联得到, 第一部分是一个 N 阶网络, 用 $H_c(z)$ 表示

$$H_c(z) = 1 - z^{-N}$$

第二部分由 N 个一阶系统并联组成, 每个一阶系统用 $H'_k(z)$ 表示, 这 N 个一阶系统均可用 IIR 直接 II 型结构实现, 然后用并联型结构实现, 得到

$$\sum_{k=0}^{N-1} H'_k(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$

再将两部分进行级联, 便可得到全部系统的系统函数 $H(z) = \frac{1}{N} H_c(z) \sum_{k=0}^{N-1} H'_k(z)$ 。

根据以上分析过程可以得到 FIR 频率抽样型结构, 如图 2-22 所示。

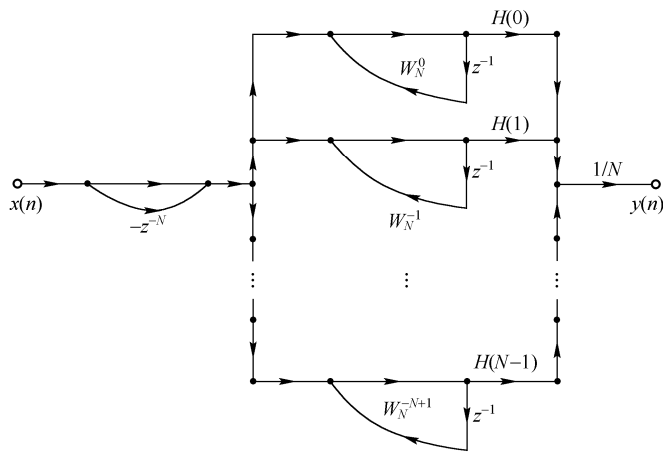


图 2-22 FIR 频率抽样型结构

需要说明的是, 频率抽样型结构中存在反馈支路, 表面上不符合 FIR 网络结构的特点, 但实际上由于整个系统函数 $H(z)$ 的 N 个极点与零点相互抵消, 系统仍然属于 FIR 型结构。

2.9 本章小结

1. Z 变换和收敛域

Z 变换 (ZT) 是离散系统分析的重要数学工具, 类似于连续系统分析中的拉普拉斯变换。熟练掌握常用变换对和 Z 变换的性质, 有利于 Z 变换的应用; 收敛域是 Z 变换中十分重要的概念, 应熟记不同序列 Z 变换收敛域的特点; 在求 Z 反变换时, 要重点掌握部分分式法。

2. 非周期序列的傅里叶变换 (DTFT, 简称 FT)

FT 可以看成是 ZT 在单位圆上的特殊情况, 是 LSI 离散系统频域分析的基础, 应熟练掌握 FT 的概念和重要性质。

3. 离散系统的变换域分析

应用 FT 和 ZT 来研究系统的方法称为变换域分析, 一是要重点掌握频率响应和系统函数的概念与求法, 二是要清楚系统的因果稳定性与系统函数的关系。

4. 离散系统的网络结构

IIR 滤波器网络结构分为直接 I 型、直接 II 型、级联型和并联型，其中直接 II 型最为重要，应熟练掌握。
FIR 滤波器的网络结构分为直接型、级联型和频率抽样型。

习题 2

基础习题

2-1 选择题。

- (1) 离散序列 $x(n)$ ，若其 Z 变换 $X(z)$ 存在，而且 $X(z)$ 的收敛域为 $R_{x-} < |z| \leq \infty$ ，则 $x(n)$ 为_____。
 - A. 因果序列
 - B. 右边序列
 - C. 左边序列
 - D. 双边序列
- (2) 若 $x(n)$ 是一个因果序列， R_{x-} 是一个正实数，则 $x(n)$ 的 Z 变换 $X(z)$ 的收敛域为_____。
 - A. $R_{x-} < |z| \leq \infty$
 - B. $R_{x-} < |z| < \infty$
 - C. $0 \leq |z| < R_{x+}$
 - D. $0 < |z| < R_{x+}$
- (3) 一个稳定的线性移不变因果系统的系统函数 $H(z)$ 的收敛域为_____。
 - A. $r < |z| \leq \infty, r < 1$
 - B. $0 < |z| \leq r, r > 1$
 - C. $r < |z| \leq \infty, r > 1$
 - D. $0 \leq |z| \leq r, r < 1$
- (4) 一离散序列 $x(n)$ ，其定义域为 $-5 \leq n < \infty$ ，若其 Z 变换存在，则其 Z 变换 $X(z)$ 的收敛域为_____。
 - A. $R_{x-} < |z| \leq \infty$
 - B. $R_{x-} < |z| < \infty$
 - C. $0 < |z| < \infty$
 - D. $R_{x-} < |z| < R_{x+}$
- (5) 已知某序列 Z 变换的收敛域为 $|z| > 3$ ，则该序列为_____。
 - A. 有限长序列
 - B. 右边序列
 - C. 左边序列
 - D. 双边序列
- (6) 下列关于因果稳定系统的说法，错误的是_____。
 - A. 极点可以在单位圆外
 - B. 系统函数的 Z 变换收敛区间包括单位圆
 - C. 因果稳定系统的单位抽样响应为因果序列
 - D. 系统函数的 Z 变换收敛区间包括 $z = \infty$
- (7) 一个线性移不变系统稳定的充分必要条件是其系统函数的收敛域包含_____。
 - A. 单位圆
 - B. 原点
 - C. 实轴
 - D. 虚轴
- (8) 已知某序列 Z 变换的收敛域为 $|z| < 1$ ，则该序列为_____。
 - A. 有限长序列
 - B. 右边序列
 - C. 左边序列
 - D. 双边序列
- (9) 以下是一些系统函数的收敛域，则其中稳定的是_____。
 - A. $|z| > 2$
 - B. $|z| < 0.5$
 - C. $0.5 < |z| < 2$
 - D. $|z| < 0.9$
- (10) 已知某序列 Z 变换的收敛域为 $0 < |z| < \infty$ ，则该序列为_____。
 - A. 有限长序列
 - B. 右边序列
 - C. 左边序列
 - D. 双边序列
- (11) 线性移不变系统的系统函数的收敛域为 $|z| < 2$ ，则可以判断系统为_____。
 - A. 因果稳定系统
 - B. 因果非稳定系统

- C. 非因果稳定系统 D. 非因果非稳定系统
- (12) 离散傅里叶变换是_____的 Z 变换。
 A. 单位圆内等间隔抽样 B. 单位圆外等间隔抽样
 C. 单位圆上等间隔抽样 D. 右半平面等间隔抽样
- (13) 线性移不变系统的系统函数的收敛域为 $|z| > 2$, 则可以判断该系统为_____。
 A. 因果稳定系统 B. 因果非稳定系统
 C. 非因果稳定系统 D. 非因果非稳定系统
- (14) 设有限长序列为 $x(n)$, $N_1 \leq n \leq N_2$, 当 $N_1 < 0$, $N_2 > 0$ 时, Z 变换的收敛域为_____。
 A. $0 < |z| < \infty$ B. $|z| > 0$
 C. $|z| < \infty$ D. $|z| \leq \infty$
- (15) 下列序列中, Z 变换收敛域包括 $|z| = \infty$ 的是_____。
 A. $u(n+1)-u(n)$ B. $u(n)-u(n-1)$
 C. $u(n)-u(n+1)$ D. $u(n)+u(n+1)$
- (16) 已知某序列 Z 变换的收敛域为 $3 < |z| < 5$, 则该序列为_____。
 A. 有限长序列 B. 右边序列
 C. 左边序列 D. 双边序列
- (17) 设有限长序列为 $x(n)$, $N_1 \leq n \leq N_2$, 当 $N_1 < 0$, $N_2 = 0$ 时, Z 变换的收敛域为_____。
 A. $0 < |z| < \infty$ B. $|z| > 0$
 C. $|z| < \infty$ D. $|z| \leq \infty$
- (18) 已知 $x(n)$ 的 Z 变换为 $X(z)$, 则 $x(n+n_0)$ 的 Z 变换为_____。
 A. $n_0 X(z)$ B. $z^{n_0} X(z)$ C. $X(z^{n_0})$ D. $z^{-n_0} X(z)$
- (19) 序列的傅里叶变换是_____的周期函数, 周期为_____。
 A. 时间; T B. 数字频率; π C. 时间; $2T$ D. 数字频率; 2π
- (20) 已知某序列 $x(n)$ 的 Z 变换为 $z+z^2$, 则 $x(n-2)$ 的 Z 变换为 _____。
 A. z^3+z^4 B. $-2z-2z^{-2}$ C. $z+z^2$ D. $z^{-1}+1$
- (21) 下列序列中, _____为共轭对称序列。
 A. $x(n)=x^*(-n)$ B. $x(n)=x^*(n)$
 C. $x(n)=-x^*(-n)$ D. $x(n)=-x^*(n)$
- (22) 实序列的傅里叶变换必是_____。
 A. 共轭对称函数 B. 共轭反对称函数
 C. 线性函数 D. 双线性函数
- (23) 序列共轭对称分量的傅里叶变换等于序列傅里叶变换的_____。
 A. 共轭对称分量 B. 共轭反对称分量
 C. 实部 D. 虚部
- (24) 下面说法中, 正确的是_____。
 A. 连续非周期信号的频谱为非周期连续函数
 B. 连续周期信号的频谱为非周期连续函数
 C. 离散非周期信号的频谱为非周期连续函数
 D. 离散周期信号的频谱为非周期连续函数
- (25) 下面描述中, 最适合离散傅里叶变换 DFT 的是_____。
 A. 时域为离散序列, 频域也为离散序列
 B. 时域为离散有限长序列, 频域也为离散有限长序列

- C. 时域为离散无限长序列, 频域为连续周期信号
 D. 时域为离散周期序列, 频域也为离散周期序列
- (26) 对于序列的傅里叶变换而言, 其信号的特点是_____。
 A. 时域连续非周期, 频域连续非周期
 B. 时域离散周期, 频域连续非周期
 C. 时域离散非周期, 频域连续非周期
 D. 时域离散非周期, 频域连续周期
- (27) 系统的单位抽样响应为 $h(n) = \delta(n-1) + \delta(n+1)$, 其频率响应为_____。
 A. $H(e^{j\omega}) = 2 \cos \omega$ B. $H(e^{j\omega}) = 2 \sin \omega$
 C. $H(e^{j\omega}) = \cos \omega$ D. $H(e^{j\omega}) = \sin \omega$
- (28) 已知因果序列 $x(n]$ 的 Z 变换 $X(z) = \frac{1-z^{-1}}{2+z^{-1}}$, 则 $x(0) =$ _____。
 A. 0.5 B. 0.75 C. -0.5 D. -0.75
- (29) 序列实部的傅里叶变换等于序列傅里叶变换的_____分量。
 A. 共轭对称 B. 共轭反对称 C. 偶对称 D. 奇对称
- (30) 已知因果序列 $x(n]$ 的 Z 变换 $X(z) = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$, 则 $x(0) =$ _____。
 A. 0 B. 1 C. -1 D. 不确定
- (31) 对于 $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$ 的 Z 变换, _____。
 A. 零点为 $z = \frac{1}{2}$, 极点为 $z = 0$ B. 零点为 $z = 0$, 极点为 $z = \frac{1}{2}$
 C. 零点为 $z = \frac{1}{2}$, 极点为 $z = 1$ D. 零点为 $z = \frac{1}{2}$, 极点为 $z = 2$
- (32) 设系统的单位脉冲响应为 $h(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + 5\delta(n-2)$, 其频率响应为_____。
 A. $H(e^{j\omega}) = e^{j\omega} + e^{j2\omega} + e^{j5\omega}$ B. $H(e^{j\omega}) = 1 + 2e^{-j\omega} + 5e^{-j2\omega}$
 C. $H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega} + e^{-j2\omega} + e^{-j5\omega}$ D. $H(e^{j\omega}) = 1 + 2e^{j\omega} + 5e^{j2\omega}$
- (33) 设序列 $x(n) = 2\delta(n+1) + \delta(n) - \delta(n-1)$, 则 $X(e^{j\omega})|_{\omega=0}$ 的值为_____。
 A. 1 B. 2
 C. 4 D. 1/2
- (34) 若 $x(n]$ 为实序列, $X(e^{j\omega})$ 是其傅里叶变换, 则_____。
 A. $X(e^{j\omega})$ 的幅度和幅角都是 ω 的偶函数
 B. $X(e^{j\omega})$ 的幅度是 ω 的奇函数, 幅角是 ω 的偶函数
 C. $X(e^{j\omega})$ 的幅度是 ω 的偶函数, 幅角是 ω 的奇函数
 D. $X(e^{j\omega})$ 的幅度和幅角都是 ω 的奇函数

2-2 求下列序列的 Z 变换, 并标明收敛域。

- (1) $x(n) = \delta(n-4)$ (2) $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$
- (3) $x(n) = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)$ (4) $x(n) = \frac{1}{n}, n \geq 1$

$$(5) x(n) = 0.5^n u(n-1)$$

$$(6) x(n) = n(0.2)^n u(n)$$

综合习题

2-3 已知 $X(z) = \frac{-3z^{-1}}{2-5z^{-1}+2z^{-2}}$, 分别求:

(1) 收敛域 $0.5 < |z| < 2$ 对应的原序列 $x(n)$;

(2) 收敛域 $|z| > 2$ 对应的原序列 $x(n)$ 。

2-4 已知序列 $x(n]$ 的傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})$, 试求下列序列的傅里叶变换。

$$(1) x_1(n) = x(n-n_0)$$

$$(2) x_2(n) = x^*(n)$$

$$(3) x_3(n) = x(-n)$$

$$(4) x_4(n) = \frac{x^*(-n) + x(n)}{2}$$

$$(5) x_5(n) = (n-1)^2 x(n)$$

2-5 求以下 $X(z)$ 的 Z 反变换。

$$(1) X(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

$$(2) X(z) = \frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{4}$$

2-6 试求如下序列的傅里叶变换。

$$(1) x(n) = \delta(n-3)$$

$$(2) x(n) = a^n u(n), \quad 0 < a < 1$$

$$(3) x(n) = e^{-an} u(n)$$

$$(4) x(n) = e^{-an} u(n) \cos(\omega_0 n)$$

2-7 用 Z 变换的卷积定理求下列卷积和。

$$(1) y(n) = 5^n u(n) * \delta(n-2)$$

$$(2) y(n) = 5^n u(n) * u(n+1)$$

2-8 用 Z 变换法解下列差分方程。

$$(1) y(n) - 0.9y(n-1) = 0.05u(n), \quad \text{初始条件 } y(-1) = 0;$$

$$(2) y(n) - 0.8y(n-1) + 0.15y(n-2) = \delta(n), \quad \text{初始条件 } y(-1) = 0.2, \quad y(-2) = 0.5。$$

2-9 若序列 $h(n)$ 是实因果序列, 其傅里叶变换的实部如下: $H_R(e^{j\omega}) = 1 + \cos \omega$ 。求序列 $h(n)$ 及其傅里叶变换 $H(e^{j\omega})$ 。

2-10 已知因果系统用下列差分方程描述:

$$y(n) = 0.9y(n-1) + x(n) + 0.9x(n-1)$$

(1) 求系统函数 $H(z)$ 及单位脉冲响应 $h(n)$;

(2) 写出频率响应 $H(e^{j\omega})$ 表达式, 并定性画出其幅频特性曲线;

(3) 设 $x(n) = e^{j\omega_0 n}$, 求输出 $y(n)$ 。

2-11 若序列 $h(n)$ 是实因果序列, 其傅里叶变换的实部如下:

$$H_R(e^{j\omega}) = \frac{1 - a \cos \omega}{1 + a^2 - 2a \cos \omega}, \quad |a| < 1$$

求序列 $h(n)$ 及其傅里叶变换 $H(e^{j\omega})$ 。

2-12 设系统用下面的差分方程描述:

$$y(n) - \frac{3}{4}y(n-1) + \frac{1}{8}y(n-2) = x(n) + \frac{1}{3}x(n-1)$$

试画出系统的直接型、级联型和并联型结构流程图。

2-13 设离散系统的差分方程为

$$y(n) = (a+b)y(n-1) - aby(n-2) + x(n-2) + (a+b)x(n-1) + abx(n)$$

试画出系统的直接型、级联型和并联型结构流图。

2-14 已知系统函数为 $H(z) = \frac{4(1+z^{-1})(1-1.414z^{-1}+z^{-2})}{(1-0.5z^{-1})(1+0.9z^{-1}+0.18z^{-2})}$ ，试画出其各种可能的级联型结构流图。

2-15 已知系统函数 $H(z) = \frac{2 + \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{3}{8}z^{-2}}$ ，画出其直接 I 型和直接 II 型结构流图。

2-16 已知 FIR 滤波器的单位脉冲响应为 $h(n) = \delta(n) - \delta(n-1) + \delta(n-4)$ ，试画出其直接型结构流图。

2-17 已知 FIR 滤波器的单位脉冲响应为 $h(n) = \begin{cases} 2^n & 0 \leq n \leq 5 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$ ，试画出其直接型结构流图。

2-18 已知 FIR 滤波器的系统函数为 $H(z) = (1-1.4z^{-1}+3z^{-2})(1+2z^{-1})$ ，试画出其直接型和级联型结构流图。

第3章 离散傅里叶变换(DFT)



学习重点

- ★ 熟练掌握周期序列的离散傅里叶级数的公式。
- ★ 熟练掌握离散傅里叶变换的定义及性质。
- ★ 学会用离散傅里叶变换计算线性卷积和。
- ★ 了解频域抽样理论。
- ★ 学会用离散傅里叶变换对信号进行谱分析。

实际的序列都是有限长序列,对于有限长序列可以采用 Z 变换和傅里叶变换(FT)进行分析及计算,这是本书第2章研究的主要内容。本章将介绍另一种重要的数学工具“离散傅里叶变换(DFT)”,由于DFT是一种时域和频域均离散化的数学变换,适合数值运算和计算机处理,因此DFT成为分析离散信号和系统的有力工具。

首先,离散傅里叶变换(DFT)作为有限长序列的一种频域表示法,具有相当重要的理论研究价值。其次,由于DFT快速算法(FFT)的出现使DFT的计算速度大大提高,促进了DFT在各个领域的实际应用,因而离散傅里叶变换(DFT)在数字信号处理的各种算法中占有核心地位。

有限长序列的离散傅里叶变换(DFT)和周期序列的离散傅里叶级数(DFS)在本质上是相同的,为了更好地理解DFT,本章首先讨论周期序列的离散傅里叶级数(DFS)。

3.1 周期序列的离散傅里叶级数

设离散时间序列 $x(n)$ 为周期序列,则一定满足:

$$x(n) = x(n + mN) \quad (3-1)$$

式中, N (正整数)为序列的周期, m 为任意整数。为加以区分,这里用 $\tilde{x}(n)$ 表示周期序列。

在数学上,可以把连续的周期函数展开成傅里叶级数的形式,类似地,也可以把离散的周期函数(周期序列) $\tilde{x}(n)$ 用离散傅里叶级数(DFS)来表示

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \text{IDFS}[\tilde{X}(k)], \quad n=0,1,\dots,N-1 \quad (3-2)$$

式中, $\tilde{X}(k)$ 称为周期序列的傅里叶系数,用来表示周期序列的频谱,其运算公式如下

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \text{DFS}[\tilde{x}(n)], \quad k=0,1,\dots,N-1 \quad (3-3)$$

显然

$$\tilde{X}(k + mN) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+mN)n} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \tilde{X}(k) \quad (3-4)$$

所以, $\tilde{X}(k)$ 是一个周期序列,周期为 N 。即若原序列 $\tilde{x}(n)$ 的周期为 N ,则其傅里叶系数 $\tilde{X}(k)$ 也是周期序列,且其周期也为 N ,如图3-1所示。

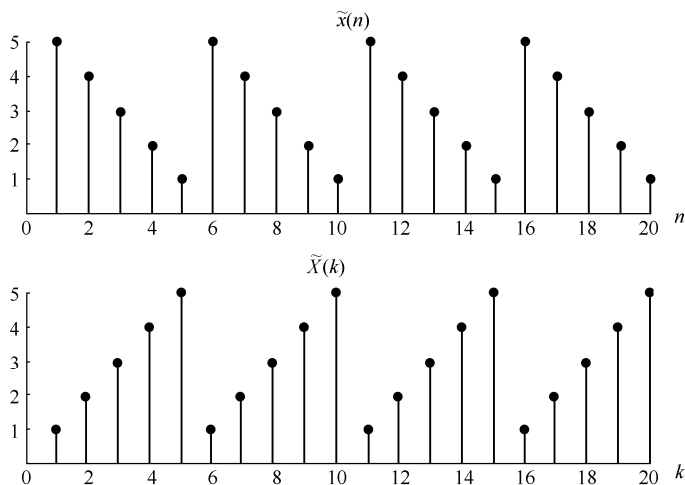


图 3-1 周期序列及离散傅里叶级数序列示意图

观察 $\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$, 该式与连续信号的傅里叶级数相对应, 表明可将周期序列分解成 N

个独立谐波分量: 直流分量 $e^{j\frac{2\pi}{N}0n}$, 基波序列 $e^{j\frac{2\pi}{N}1n}$, 二次谐波序列 $e^{j\frac{2\pi}{N}2n}$, \dots , $N-1$ 次谐波序列 $e^{j\frac{2\pi}{N}(N-1)n}$ 。这里, $k=0, 1, 2, \dots, N-1$, 第 k 次谐波的频率为 $\omega_k = (2\pi/N)k$, 幅度为 $(1/N)\tilde{X}(k)$ 。例如, 基波频率为 $2\pi/N$, 幅度是 $(1/N)\tilde{X}(1)$ 。

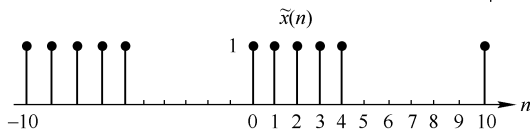
上述分析表明一个周期序列可以用 DFS 表示其离散频谱的分布规律。

要点一: DFS 正变换公式: $\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \text{DFS}[\tilde{x}(n)]$ 。

要点二: DFS 反变换公式: $\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \text{IDFS}[\tilde{X}(k)]$ 。

【例 3-1】设 $\tilde{x}(n)$ 的周期为 $N=10$, 在一个周期内, 其表达式为 $\tilde{x}(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & 5 \leq n \leq 9 \end{cases}$, 周期序列 $\tilde{x}(n)$

的图像如图 3-2 所示, 求其离散傅里叶级数 $\tilde{X}(k)$, 并画出其幅度特性 $|\tilde{X}(k)|$ 。

图 3-2 周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的图像

解: 由 DFS 的定义式得

$$\begin{aligned}
 \tilde{X}(k) &= \text{DFS}[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^9 \tilde{x}(n) W_{10}^{nk} = \sum_{n=0}^9 \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{10}kn} \\
 &= \sum_{n=0}^4 e^{-j\frac{2\pi}{10}kn} = \frac{1 - e^{-j\frac{\pi}{5}k \times 5}}{1 - e^{-j\frac{\pi}{5}k}} = \frac{1 - e^{-j\pi k}}{1 - e^{-j\frac{\pi}{5}k}} = \frac{e^{-j\frac{\pi}{2}k} (e^{j\frac{\pi}{2}k} - e^{-j\frac{\pi}{2}k})}{e^{-j\frac{\pi}{10}k} (e^{j\frac{\pi}{10}k} - e^{-j\frac{\pi}{10}k})} \\
 &= e^{-j\frac{2}{5}\pi k} \frac{\sin \frac{\pi}{2}k}{\sin \frac{\pi}{10}k}
 \end{aligned}$$

显然 $\tilde{X}(k)$ 是以 $N=10$ 为周期的周期函数, 其幅度函数为 $|\tilde{X}(k)| = \left| \frac{\sin \frac{\pi}{2} k}{\sin \frac{\pi}{10} k} \right|$, 画出该幅度特性曲线,

如图 3-3 所示。

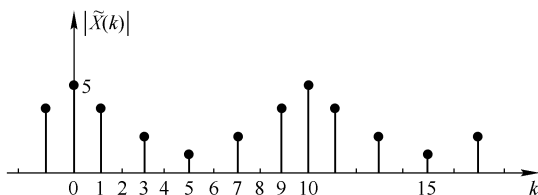


图 3-3 离散傅里叶级数的幅度特性曲线

3.2 离散傅里叶变换

在实际的数字信号处理过程中可获取并处理的序列是有限长序列, 而周期序列作为一种理论模型, 实际上只有有限个序列值有意义, 它与有限长序列有着本质的联系。本节将根据周期序列和有限长序列之间的关系, 由周期序列的离散傅里叶级数 (DFS) 表达式推导出有限长序列的离散频谱表达式, 即离散傅里叶变换 (DFT), 并同时推导出离散傅里叶变换 (DFT) 与非周期序列的傅里叶变换 (FT) 之间的关系。

3.2.1 离散傅里叶变换的定义式

设周期序列 $\tilde{x}(n)$, 周期为 N , 如图 3-4 所示, 称区间 $[0, N-1]$ 为周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的主值区间。令有限长序列

$$x(n) = \begin{cases} \tilde{x}(n) & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (3-5)$$

称为周期序列 $X(k)$ 的主值序列, 如图 3-5 所示, $x(n)$ 只在 $n=0, \dots, N-1$ 有值, 当 n 为其他值时, $x(n)=0$ 。可以把 $x(n)$ 视为周期为 N 的周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的一个周期, 又可以把 $\tilde{x}(n)$ 称为有限长序列 $x(n)$ 的周期延拓序列。两者的关系可表示成:

$$\tilde{x}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n+mN) = x((n))_N \quad (m \text{ 为整数}) \quad (3-6)$$

$$\text{和} \quad x(n) = \tilde{x}(n)R_N(n) \quad (3-7)$$

式中, $((n))_N$ 在数学上表示整数 n 对整数 N 的余数, 或称整数 n 对整数 N 取模值。若令 $n = n_0 + rN$, ($0 \leq n_0 \leq N-1$, r 为整数), 则有 $((n))_N = n_0$ 。例如, $\tilde{x}(n)$ 是周期为 $N=10$ 的序列, 则有 $\tilde{x}(10) = x((10))_{10} = x(0)$, $\tilde{x}(15) = x((15))_{10} = x(5)$ 。

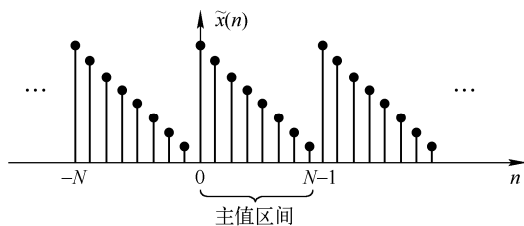


图 3-4 周期序列

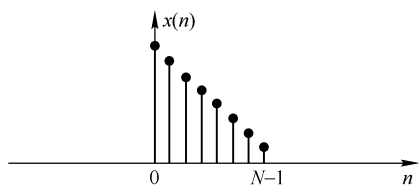


图 3-5 主值序列

同样 $\tilde{x}(n)$ 的离散傅里叶系数 $\tilde{X}(k)$ 也是一个周期为 N 的周期序列, 取 $\tilde{X}(n)$ 主值区间内的所有序列值作为一个有限长序列, 用 $X(k)$ 来表示, 显然有以下关系式成立:

$$\tilde{X}(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} X(k + lN) = X((k))_N \quad (l \text{ 为整数}) \quad (3-8)$$

$$X(k) = \tilde{X}(k)R_N(k) \quad (3-9)$$

3.1 节中给出了周期序列的离散傅里叶级数 DFS, 为了书写方便, 通常令

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \quad (3-10)$$

则 DFS 的定义式为

$$\tilde{X}(k) = \text{DFS}[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)W_N^{nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3-11)$$

$$\tilde{x}(n) = \text{IDFS}[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k)W_N^{-nk}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3-12)$$

显然, 以上两式的求和是限定在 $n=0$ 到 $n=N-1$ 及 $k=0$ 到 $k=N-1$ 的主值区间进行的, 因此也完全适用于主值序列 $x(n)$ 和 $X(k)$ 之间的数学关系。在上式中令

$$x(n) = \tilde{x}(n)R_N(n) \quad (3-13)$$

$$X(k) = \tilde{X}(k)R_N(k) \quad (3-14)$$

则得到有限长序列的离散傅里叶变换 (DFT) 的定义式

$$\text{正变换:} \quad X(k) = \text{DFT}[x(n)]_N = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3-15)$$

$$\text{反变换:} \quad x(n) = \text{IDFT}[X(k)]_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3-16)$$

式 (3-11) 和式 (3-12) 称为有限长序列的离散傅里叶变换对; N 称为 DFT 的点数, N 的值要取大于或等于时间序列的长度; $W_N^{kn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$ 称为正变换的变换核函数, 而 $W_N^{-kn} = e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$ 则称为反变换的变换核函数。

要点三: 熟记 DFT 的定义式

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)]_N = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$x(n) = \text{IDFT}[X(k)]_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

3.2.2 DFT 与 ZT、FT 之间的关系

【例 3-2】 对例 3-1 给出的周期序列 $\tilde{x}(n)$ 取其主值序列得到 $x(n)$, 其表达式为

$$x(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & 5 \leq n \leq 9 \end{cases}$$

求其离散傅里叶变换 DFT ($N=10$) 和傅里叶变换 FT, 画出傅里叶变换的幅度特性 $|X(e^{j\omega})|$, 并与 DFT 的幅度特性进行比较。

解: 由 DFS 和 DFT 的关系可知, 有限长序列 $x(n)$ 的离散傅里叶变换 $X(k)$ 是周期序列 $\tilde{x}(n)$ 离散傅里叶系数 $\tilde{X}(k)$ 的主值序列, 即

$$X(k) = \tilde{X}(k)R_N(k) = e^{-j\frac{2}{5}\pi k} \frac{\sin \frac{\pi}{2}k}{\sin \frac{\pi}{10}k} R_N(k)$$

下面计算有限长序列 $x(n)$ 的傅里叶变换。由第2章中傅里叶变换的定义式, 可求得 $x(n)$ 的傅里叶变换为

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^4 e^{-j\omega n} = \frac{1-e^{-j5\omega}}{1-e^{-j\omega}} = \frac{e^{-j(\frac{5}{2})\omega} \sin\left(\frac{5}{2}\omega\right)}{e^{-j(\frac{1}{2})\omega} \sin\left(\frac{1}{2}\omega\right)}$$

在 $X(e^{j\omega})$ 的一个周期 $[0, 2\pi]$ 区间上, 若将 $\omega = 2\pi k/10$ 代入上式, 则结果和 $X(k)$ 一样。绘出一个周期内 $X(e^{j\omega})$ 的幅度特性曲线, 如图 3-6 所示。

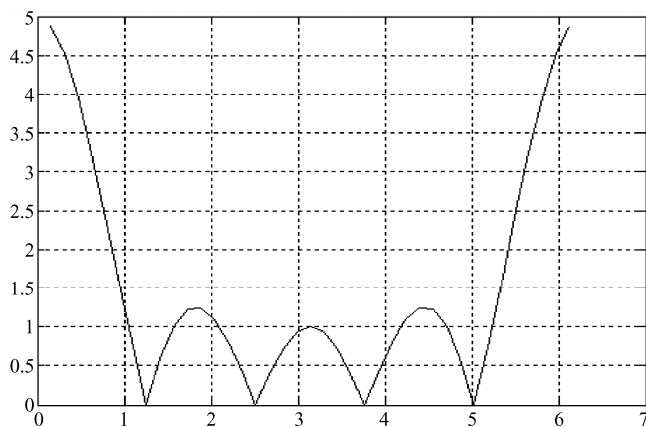


图 3-6 序列傅里叶变换的幅度特性曲线

比较图 3-3 和图 3-6 可知, 若在 $[0, 2\pi]$ 区间上对傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 以 $\Delta\omega = 2\pi/10$ 的频率间隔进行抽样, 便可得到该序列的离散傅里叶变换 $X(k)$ 。

上例也可用 MATLAB 程序实现, 下面举例说明。

【例 3-3】 已知序列 $x(n) = R_4(n)$, 试绘制其傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 的幅度频谱和相位频谱, 分别计算 8 点和 16 点 DFT, 并与 $X(e^{j\omega})$ 比较。

解: 程序如下:

```
clf % 清除所有的图形窗口
N1=8;N2=16; % 设置两种 DFT 的长度
n=0:N1-1;
k1=n;k2=0:N2-1;
w=(0:2047)*2*pi/2048;
Xw=(1-exp(-j*4*w))./(1-exp(-j*w)); % 对 x(n) 的频谱抽样 2048 点
xn=[n>=0 & n<4]; % 产生序列 x(n)
Xk1=fft(xn,N1); % 计算序列 x(n) 的 8 点 DFT
Xk2=fft(xn,N2); % 计算序列 x(n) 的 16 点 DFT
plot(w/pi,abs(Xw)); % 绘制序列 x(n) 的 DTFT 的幅频曲线
hold % 保持当前的图形窗口
H1=stem(k1*2/N1,abs(Xk1),'o');
set(H1,'color','r')
```

```
H2=stem(k2*2/N2,abs(Xk2),'*');
set(H2,'color','k');% legend('|X(e^{j\omega})|','X_1(k)','X_2(k)');
```

运行结果如图 3-7 所示。

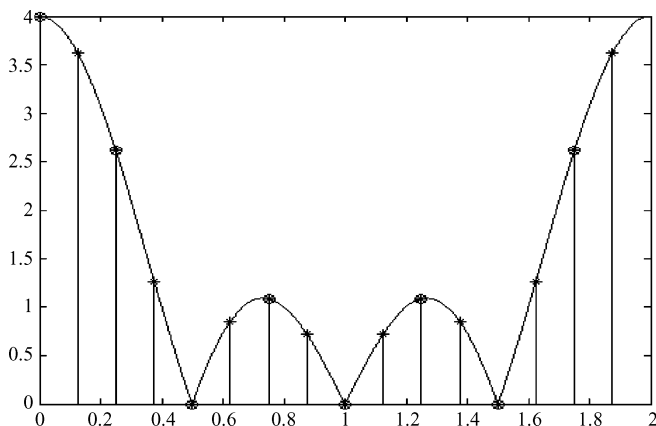


图 3-7 运行结果

上例说明序列的傅里叶变换在 $[0, 2\pi]$ 区间上的 N 点等间隔抽样, 为该序列的 N 点 DFT 值。

假设序列的长度为 M , 设 $N \geq M$, 将 N 点 DFT 和 ZT、FT 的定义重写如下

$$X(z) = \text{ZT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{M-1} x(n)z^{-n} \quad (3-17)$$

$$X(e^{j\omega}) = \text{FT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{M-1} x(n)e^{-j\omega n} \quad (3-18)$$

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)]_N = \sum_{n=0}^{M-1} x(n)W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3-19)$$

比较式 (3-17) ~ 式 (3-19), 可知

$$X(k) = X(z) \Big|_{z=e^{j\frac{2\pi k}{N}}} \quad (3-20)$$

$$X(k) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi k}{N}} \quad (3-21)$$

上述两式说明, 序列 $x(n)$ 的 N 点 DFT 是其 Z 变换在 z 平面单位圆上的 N 点等间隔抽样; 同时 $x(n)$ 的 N 点 DFT 也是其傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的 N 点等间隔抽样, 这就是 DFT 与 FT 和 ZT 的关系, 同时也表明了 DFT 的物理意义。

3.3 离散傅里叶变换的性质

利用 DFT 对序列进行傅里叶分析时, 应掌握以下几个重要性质, 有利于简化分析过程、提高处理效率。

3.3.1 隐含周期性

在 3.2 节中, 当 DFS 中的 $\tilde{x}(n)$ 和 $\tilde{X}(k)$ 取各自的主值序列 $x(n)$ 和 $X(k)$ 时, 便得到离散傅里叶变换 DFT。实际在使用 DFT 对序列进行处理时, 有限长序列都是作为周期序列的一个周期来表示的。另外根据变换的周期性质有 $W_N^R = W_N^{(k+mN)}$ 、 $W_N^{-k} = W_N^{-(k+mN)}$, 也表明了离散傅里叶变换 DFT 所隐含的周期性。或者说, 对于任意给定的一个有限长序列 $x(n)$, 取其 N 点的 DFT, 其结果是把 $x(n)$ 以 N 为

周期进行延拓, 同时其离散频谱 $X(k)$ 也同样进行以 N 为周期的延拓。即在 N 点 DFT 的定义式中, 隐含着 $X(k) = X(k + mN)$ 和 $x(n) = x(n + mN)$ (m 为整数)。

3.3.2 线性性质

设 $x_1(n)$ 、 $x_2(n)$ 的长度分别是 N_1 、 N_2 , 取 $N \geq \max\{N_1, N_2\}$ 点的 DFT, 有

$$\text{DFT}[ax_1(n) + bx_2(n)] = a\text{DFT}[x_1(n)] + b\text{DFT}[x_2(n)] \quad (a, b \text{ 是常数}) \quad (3-22)$$

$$\begin{aligned} \text{证明: } \text{DFT}[ax_1(n) + bx_2(n)] &= \sum_{n=0}^{N-1} [ax_1(n) + bx_2(n)] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \\ &= \left[a \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} + b \sum_{n=0}^{N-1} x_2(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \right] \\ &= a\text{DFT}[x_1(n)] + b\text{DFT}[x_2(n)] \end{aligned}$$

3.3.3 循环移位性质

1. 序列的循环移位

设 $x(n)$ 为有限长序列, 长度为 N , 则 $x(n)$ 的循环移位定义为

$$y(n) = x((n+m))_N R_N(n) \quad (3-23)$$

所谓序列的循环移位, 是指将有限长 N 的 $x(n)$ 进行周期延拓, 得到周期序列 $\tilde{x}(n) = x((n))_N$, 再将 $\tilde{x}(n)$ 移位得到 $\tilde{x}(n+m) = x((n+m))_N$, 然后对移位后的序列 $x((n+m))_N$ 取主值序列 (n 取值为 $0 \sim N-1$), 得到循环移位后的序列 $x((n+m))_N R_N(n)$ 。因此, 有限长序列 $x(n)$ 循环移位后得到的序列仍然是一个具有相同长度的序列。

例如, 若 $x(n) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 则 $x((n+2))_6 R_6(n) = \{3, 4, 5, 6, 1, 2\}$, $x((n-3))_6 R_6(n) = \{4, 5, 6, 1, 2, 3\}$, 而 $x((n+2))_8 R_8(n) = \{3, 4, 5, 6, 0, 0, 1, 2\}$ 。

【例 3-4】 已知 $x(n) = (0.8)^n R_8(n)$, 利用 MATLAB 生成以下序列并作图表示: $x(n)$, $x(n-m)$, $x((n))_8 R_N(n)$, 其中 $N = 24$, $0 < m < N$ 。

解: 程序如下。

```
N=24;
M=8;
m=3;% 设移位值为3
n=0:N-1;
xn=0.8.^n.*(n>=0 & n<M);           % 产生序列 x(n)
subplot(3,1,1);stem(n,xn,'. ');grid;
axis([0 length(xn),0 1]);title('序列 x(n)');
xc=xn(mod(n,8)+1);                  % 产生序列 x(n)的周期延拓, 求余后加1是因为
                                      % MATLAB 矢量的下标从1开始
subplot(3,1,2);stem(n,xc,'. ');grid;
axis([0 length(xc),0 1]);title('序列 x(n)的周期延拓序列');
xm=[xn(m+1:M) xn(1:m)];             % 产生循环移位序列
xm=[xm zeros(1,N-length(xm))];
subplot(3,1,3);stem(n,xm,'. ');grid;
axis([0 length(xm),0 1]);title('循环移位序列 x(n+m)');
```

运行结果如图 3-8 所示。

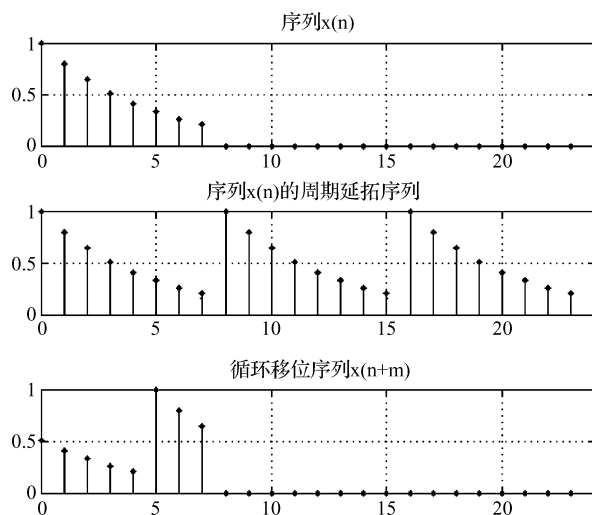


图 3-8 例 3-4 运行结果

2. 时域循环移位定理

$x(n)$ 循环左移 m 点, 取其 N 点 DFT, 则有

$$\text{DFT}[x((n+m))_N R_N(n)] = W^{-km} \text{DFT}[x(n)] \quad (3-24)$$

$$\begin{aligned} \text{证明: } \text{DFT}[x((n+m))_N R_N(n)] &= \sum_{n=0}^{N-1} [x((n+m))_N] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} [x((n+m))_N] e^{-j\frac{2\pi}{N}k(n+m)} e^{j\frac{2\pi}{N}km} \\ &= e^{j\frac{2\pi}{N}km} \sum_{n=0}^{N-1} [x((n+m))_N] e^{-j\frac{2\pi}{N}k(n+m)} \\ &= W^{-km} \text{DFT}[x(n)] \end{aligned}$$

3. 频域循环移位定理

$x(n)W_N^{mn}$ 的 N 点 DFT 为

$$\text{DFT}[x(n)W_N^{mn}] = X((k+m))_N R_N(k) \quad (3-25)$$

$$\begin{aligned} \text{证明: } \text{DFT}[x(n)W_N^{mn}] &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}mn} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}(m+k)n} = X((k+m))_N R_N(k) \end{aligned}$$

3.3.4 循环卷积性质

1. 循环卷积的定义

设有限长序列 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$, 长度分别为 N_1 和 N_2 , $N \geq \max(N_1, N_2)$,

$$y_c(n) = \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N \right] R_N(n) = \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_2(m) x_1((n-m))_N \right] R_N(n) \quad (3-26)$$

则称式(3-26)所表示的运算为 $x_1(n)$ 与 $x_2(n)$ 的 N 点循环卷积,记为 $x_1(n) \circledast x_2(n)$,亦可忽略 N 值而统一记为 $x_1(n) \otimes x_2(n)$ 。

2. DFT 的循环卷积性质

设 $x_1(n)$ 长度为 N_1 , $0 \leq n \leq N_1 - 1$; $x_2(n)$ 长度为 N_2 , $0 \leq n \leq N_2 - 1$ 。它们的循环卷积结果是 $y_c(n)$ 。取长度 $N \geq \max(N_1, N_2)$, 同时把信号 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 采用尾部补零的方法将各自长度扩充到 N ; DFT 的长度取 N 。则

$$\text{DFT}[x_1(n) \otimes x_2(n)] = \text{DFT}[x_1(n)] \cdot \text{DFT}[x_2(n)] \quad (3-27)$$

$$\text{DFT}[x_1(n) \cdot x_2(n)] = \frac{1}{N} \text{DFT}[x_1(n)] \otimes \text{DFT}[x_2(n)] \quad (3-28)$$

证明:

$$\begin{aligned} \text{DFT}[x_1(n) \otimes x_2(n)] &= \text{DFT} \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N R_N(n) \right] \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) \text{DFT}[x_2((n-m))_N R_N(n)] \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) W_N^{km} \text{DFT}[x_2(n)] \\ &= \text{DFT}[x_1(n)] \cdot \text{DFT}[x_2(n)] \\ \text{DFT}[x_1(n) \cdot x_2(n)] &= \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) x_2(n) W_N^{kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} [x_1(n) \frac{1}{N} \sum_{m=0}^N X_2(m) W_N^{-mn} W_N^{kn}] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[X_2(m) \sum_{m=0}^N x_1(n) W^{(k-m)n} \right] \\ &= \text{DFT} \left[\sum_{m=0}^{N-1} X_2(m) X_1((k-m))_N R_N(k) \right] \\ &= \frac{1}{N} \text{DFT}[x_1(n)] \otimes \text{DFT}[x_2(n)] \end{aligned}$$

3. 循环卷积的计算方法

根据循环卷积的定义式(3-26),可按如下步骤求出两个序列的循环卷积:先将 $x_2(m)$ 周期化,形成 $x_2((m))_N$,再翻褶形成 $x_2((-m))_N$,取主值序列得到 $x_2((-m))_N R_N(m)$,通常称为 $x_2(m)$ 的循环倒相序列。对 $x_2(m)$ 的循环倒相序列循环移位 n ,形成 $x_2((n-m))_N R_N(m)$,当 $n=0,1,\dots,N-1$ 时,分别将 $x_1(m)$ 与 $x_2((n-m))_N R_N(m)$ 相乘,并对 m 在 $0,1,\dots,N-1$ 区间上求和,便得到 $x_1(n)$ 与 $x_2(n)$ 的循环卷积 $y_c(n)$ 。

用于按定义计算循环卷积的方法步骤较为烦琐,计算机中通常采用矩阵相乘或快速傅里叶变换(FFT)的方法计算循环卷积。设序列 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的长度分别为 N 和 M ,取整数 $L \geq \max(N, M)$ 。下面简要介绍用矩阵相乘法计算循环卷积的步骤。

- (1) 首先构造 $x_1(n)$ 的循环倒相序列 $\{x_1(0), x_1(L-1), x_1(L-2), \dots, x_1(1)\}$,作为矩阵的第一行。
- (2) 将上述序列循环右移一位得 $\{x_1(1), x_1(0), x_1(L-1), \dots, x_1(2)\}$,作为矩阵的第二行。
- (3) 依次类推,得到如式(3-29)所示的 $L \times L$ 阶方阵。

$$\begin{bmatrix} x_1(0) & x_1(L-1) & x_1(L-2) & \cdots & x_1(1) \\ x_1(1) & x_1(0) & x_1(L-1) & \cdots & x_1(2) \\ x_1(2) & x_1(1) & x_1(0) & \cdots & x_1(3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1(L-1) & x_1(L-2) & x_1(L-3) & \cdots & x_1(0) \end{bmatrix} \quad (3-29)$$

上面的矩阵称为 $x(n)$ 的 L 点“循环卷积矩阵”，其特点如下。

① 第1行是序列 $x_1(n) = \{x_1(0), x_1(1), \dots, x_1(L-1)\}$ 的循环倒相序列(注意, 如果 $x_1(n)$ 的长度 $M < L$, 则需要在 $x_1(n)$ 末尾补 $L-M$ 个零后, 再形成第一行的循环倒相序列)。

② 从第2行开始, 各行均是由上一行循环右移一位形成的。

③ 矩阵的各主对角线上的序列值均相等。

有了上面介绍的循环卷积矩阵, 就可以写出循环卷积 $y_c(n)$ 的矩阵形式如下:

$$\begin{bmatrix} x_1(0) & x_1(L-1) & x_1(L-2) & \cdots & x_1(1) \\ x_1(1) & x_1(0) & x_1(L-1) & \cdots & x_1(2) \\ x_1(2) & x_1(1) & x_1(0) & \cdots & x_1(3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1(L-1) & x_1(L-2) & x_1(L-3) & \cdots & x_1(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(0) \\ x_2(1) \\ x_2(2) \\ \vdots \\ x_2(L-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_c(0) \\ y_c(1) \\ y_c(2) \\ \vdots \\ y_c(L-1) \end{bmatrix} \quad (3-30)$$

【例 3-5】 已知两个有限长序列 $x(n) = \{1, 2, 3, 4\}$, $h(n) = \{4, 3, 2, 1\}$, 求 4 点和 8 点循环卷积。

解: 按照式 (3-30) 写出 $h(n)$ 与 $x(n)$ 的 4 点循环卷积矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} y_c(0) \\ y_c(1) \\ y_c(2) \\ y_c(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 22 \\ 24 \\ 30 \end{bmatrix}$$

$h(n)$ 与 $x(n)$ 的 8 点循环卷积矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} y_c(0) \\ y_c(1) \\ y_c(2) \\ y_c(3) \\ y_c(4) \\ y_c(5) \\ y_c(6) \\ y_c(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ 20 \\ 30 \\ 20 \\ 11 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

上例亦可用 MATLAB 实现, 程序如下:

```
clear all
xn=[1 2 3 4];
hn=[4 3 2 1];
hn1=fliplr(hn);
H1=toeplitz(hn,[hn(1) hn1(1:3)]);
y1=H1*xn'
xn2=[1 2 3 4 0 0 0 0];
hn2=[4 3 2 1 0 0 0 0];
hn3=fliplr(hn2);
```

```
H2=toeplitz(hn2,[hn2(1) hn3(1:7)]);
y2=H2*xn2'
```

运行结果为

```
y1=24,22,24,30
Y2=4,11,20,30,20,11,4,0
```

3.3.5 共轭对称性

1. 有限长共轭对称序列和有限长共轭反对称序列

本节所讲的有限长序列的对称性是指序列 $x(n)$ 、 $X(k)$ 关于序列中心点 $\frac{N}{2}$ 的对称性。

定义：满足关系式

$$x_{\text{ep}}(n) = x_{\text{ep}}^*(N-n), \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (3-31)$$

的序列称为有限长共轭对称序列。

而满足关系式

$$x_{\text{op}}(n) = -x_{\text{op}}^*(N-n), \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (3-32)$$

的序列称为有限长共轭反对称序列。

在数学上，任何有限长序列 $x(n)$ 都可以分解为有限长共轭对称分量和有限长共轭反对称分量之和，即

$$x(n) = x_{\text{ep}}(n) + x_{\text{op}}(n) \quad (3-33)$$

式中，有限长共轭对称分量可表示为

$$x_{\text{ep}}(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(N-n)] \quad (3-34)$$

有限长共轭反对称分量表示为

$$x_{\text{op}}(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(N-n)] \quad (3-35)$$

同理，在频域中， $X(k)$ 也可分解为有限长共轭对称序列和有限长共轭反对称序列之和，即

$$X(k) = X_{\text{ep}}(k) + X_{\text{op}}(k) \quad (3-36)$$

式中，

$$X_{\text{ep}}(k) = \frac{1}{2}[X(k) + X^*(N-k)] \quad (3-37)$$

$$X_{\text{op}}(k) = \frac{1}{2}[X(k) - X^*(N-k)] \quad (3-38)$$

2. DFT 的共轭对称性

序列 $x(n)$ 又可以分解成实部 $x_r(n)$ 和虚部 $jx_i(n)$ 之和，序列 $X(k)$ 又可以分解成实部 $X_r(k)$ 和虚部 $jX_i(k)$ 之和。

$$x(n) = x_r(n) + jx_i(n) = x_{\text{ep}}(n) + x_{\text{op}}(n) \quad (3-39)$$

$$X(k) = X_{\text{ep}}(k) + X_{\text{op}}(k) = X_r(k) + jX_i(k) \quad (3-40)$$

共轭对称性可描述为

若

$$\text{DFT}[x(n)] = X(k)$$

则

$$\text{DFT}[x_{\text{ep}}(n)] = X_r(k) \quad (3-41)$$

$$\text{DFT}[x_{\text{op}}(n)] = \text{j}X_i(k) \quad (3-42)$$

$$\text{DFT}[x_r(n)] = X_{\text{ep}}(k) \quad (3-43)$$

$$\text{DFT}[\text{j}x_i(n)] = X_{\text{op}}(k) \quad (3-44)$$

根据共轭对称性,在进行实际计算时可以减少运算量。例如,常见的序列是实数序列,把两个长度为 N 的实数序列分别作为实部和虚部而构成一个同样长度的复数序列,将该复数序列进行DFT以后,根据式(3-39)和式(3-40)进行共轭分解,可以得到它们的各自DFT的结果。该计算方法可使总DFT的运算量减少接近一半。

以上为DFT的主要性质,现将这些性质总结为表3-1,供读者查阅和使用。

表 3-1 DFT 的主要性质

	序 列	DFT
1	$ax_1(n) + bx_2(n)$	$aX_1(k) + bX_2(k)$
2	$x((n+m))_N R_N(n)$	$W_N^{-mk} X(k)$
3	$W_N^{mn} x(n)$	$X((k+m))_N R_N(k)$
4	$x_1(n) \otimes x_2(n)$	$X_1(k)X_2(k)$
5	$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{N} X_1(k) \otimes X_2(k)$
6	$x_{\text{ep}}(n) = \frac{1}{2} [x(n) + x^*(N-n)]$	$X_r(k)$
7	$x_{\text{op}}(n) = \frac{1}{2} [x(n) - x^*(N-n)]$	$\text{j}X_i(k)$
8	$x_r(n) = \frac{1}{2} [x(n) + x^*(n)]$	$X_{\text{ep}}(k) = \frac{1}{2} [X(k) + X^*(N-k)]$
9	$\text{j}x_i(n) = \frac{1}{2} [x(n) - x^*(n)]$	$X_{\text{op}}(k) = \frac{1}{2} [X(k) - X^*(N-k)]$
10	$x(n)$ 是任意实序列	$X(k) = X^*(N-k)$

3.4 频率域抽样理论

假设序列 $x(n)$ 的长度 M ,其傅里叶变换 $X(e^{\text{j}\omega}) = \sum_{n=0}^{M-1} x(n)e^{-\text{j}\omega n}$ 在 $\omega \in [0, 2\pi]$ 区间上进行 N 点等间隔频率抽样,得到 $X_N(k)$ ($0 \leq k \leq N-1$)。

以 $X_N(k)$ 为主值,以 N 为周期进行延拓,得到周期序列 $\tilde{X}(k)$;按离散傅里叶级数公式,得到 $\text{IDFS}[\tilde{X}(k)] = \tilde{x}_N(n)$ 。

$\tilde{x}_N(n) = x_N((n))_N$ 是以 $y(n)$ 为主值,以 N 为周期进行延拓得到的周期序列。

可见,当 $N \geq M$ 时, $x_N(n) = x(n)$;否则当 $N < M$ 时,会发生时域混叠现象, $x_N(n)$ 无法恢复原序列 $x(n)$ 。

由此得到频率抽样定理:如果序列 $x(n)$ 的长度是 M ,其傅里叶变换 $X(e^{\text{j}\omega})$ 在 $[0, 2\pi]$ 区间上的 N 点等间隔抽样值序列为 $X(k)$ 。只有当频域抽样点数 $N \geq M$ 时,才能使频域抽样值序列 $X(k)$ 的离散傅里叶反变换序列 $x_N(n)$ 不发生时域混叠现象,可由 $x_N(n)$ 重建 $x(n)$,即保留原信号 $x(n)$ 的全部信息。而当 $N < M$ 时,会发生时域混叠现象,即 $x_N(n)$ 无法恢复原序列 $x(n)$ 。

3.5 应用实例

3.5.1 利用 DFT 求卷积和

1. 循环卷积和线性卷积的关系

【例 3-6】 已知两序列分别为 $x_1(n) = \{1, 1, 1\}$, $x_2(n) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 试计算两序列的线性卷积 $y_l(n)$, 以及 $L = 5, 6, 7, 8$ 点的各循环卷积 y_5 、 y_6 、 y_7 、 y_8 , 并比较循环卷积和线性卷积的关系。

解: 根据本书第 2 章线性卷积的定义式, 可求得线性卷积为

$$y_l(n) = \{1, 3, 6, 9, 12, 9, 5\}$$

显然, $x_1(n)$ 的长度为 $N_1 = 3$, $x_2(n)$ 的长度为 $N_2 = 5$, 因此两者线性卷积 $y_l(n)$ 的长度为 $N_1 + N_2 - 1 = 7$ 。

利用 3.3 节介绍的矩阵法, 可分别求出循环卷积为

$$L = 5 \text{ 点: } y_5 = \{10, 8, 6, 9, 12\}$$

$$L = 6 \text{ 点: } y_6 = \{6, 3, 6, 9, 12, 9\}$$

$$L = 7 \text{ 点: } y_7 = \{1, 3, 6, 9, 12, 9, 5\}$$

$$L = 8 \text{ 点: } y_8 = \{1, 3, 6, 9, 12, 9, 5, 0\}$$

可以看到当循环卷积的点数 $L \geq 7$ 时, 循环卷积等于线性卷积。上述分析可推广到一般, 即当循环卷积的点数 $L \geq N_1 + N_2 - 1$ 时, 可用循环卷积代替线性卷积。

要点四: 有限长序列 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的长度分别为 N_1 和 N_2 , 则两者线性卷积 $y_l(n)$ 的长度为 $N_1 + N_2 - 1$ 。而当循环卷积的点数 $L \geq N_1 + N_2 - 1$ 时, 可用循环卷积代替线性卷积。

2. 利用 DFT 卷积定理计算循环卷积和线性卷积

通过【例 3-6】可知, 当循环卷积的长度大于或等于线性卷积的长度时, 两者结果相等, 可以用循环卷积来计算线性卷积。由 DFT 的性质, 可以将时域的卷积变换成频域的乘积, 也可以把频域的卷积变换成时域的乘积, 以便于用 DFT 计算两序列的卷积。

由 DFT 的卷积性质得

$$\begin{aligned} x_1(n) \otimes x_2(n) &= \text{IDFT}\{\text{DFT}[x_1(n) \otimes x_2(n)]\} \\ &= \text{IDFT}\{\text{DFT}[x_1(n)] \cdot \text{DFT}[x_2(n)]\} \end{aligned} \quad (3-45)$$

式 (3-45) 表明可用 DFT 计算两序列的循环卷积, 具体计算过程如图 3-9 所示。

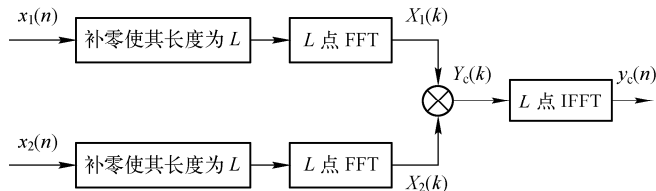


图 3-9 用 DFT 计算卷积示意图

用 DFT 计算卷积时可以借助 DFT 的快速算法 (FFT) 进行计算, 以提高计算速度。对于两个有限长的信号进行卷积, 用上述方法计算是方便的 (详见本书第 4 章相关内容)。

3.5.2 利用 DFT 对信号进行近似谱分析

所谓信号的谱分析, 就是计算信号的傅里叶变换。连续信号与系统的傅里叶分析显然不便于直接用

计算机进行计算,使其应用受到限制,而 DFT 是一种时域和频域均离散化的变换,适合数值运算。对连续信号和连续系统,依据奈奎斯特抽样定理,通过对时域和频域的抽样,应用 DFT 进行近似谱分析。

在工程中,常用 DFT 对连续信号进行谱分析,即需对连续信号进行抽样量化处理。依据傅里叶变换理论,时间和频率同时为有限的信号是不存在的。对于带限信号其持续时间必为无限长,导致抽样点数太多,以致无法存储和计算,只好截取有限点;而对于持续时间有限的信号,其频谱必然无限宽,为防止时域抽样后频谱混叠失真,通常采用预滤波法滤除幅度较小的高频成分,使连续信号的带宽小于折叠频率(抽样频率的一半)。这样,连续信号 $x_a(t)$ 持续时间为有限长,其频谱 $X_a(j\Omega)$ 为有限带宽。为了利用 DFT 对 $x_a(t)$ 进行谱分析,首先要对其进行时域抽样得到 $x(n)$,其次对 $x(n)$ 进行 DFT 得到 $X(k)$ 。这里时域信号 $x(n)$ 和频谱 $X(k)$ 均为有限长离散函数,分别作为原连续时间信号 $x_a(t)$ 和连续频谱 $X_a(j\Omega)$ 的近似值。所以用 DFT 对连续信号进行谱分析必然是近似的,其近似程度与信号带宽、抽样频率和截取长度有关。如何使 DFT 近似得更加合理是重点关注的问题。

下面就这一问题进行分析。这里连续傅里叶变换中的频率用 f 表示。

1. 连续频谱 $X_a(jf)$ 和离散频谱 $X(k)$ 的关系

连续信号 $x_a(t)$ 的持续时间是 T_p , 最高频率是 f_c , 傅里叶变换是

$$X_a(jf) = \text{FT}[x_a(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (3-46)$$

对 $x_a(t)$ 以抽样间隔 T , 抽样频率 $f_s = \frac{1}{T}$ 进行时域抽样,得到 $x_a(nT)$, 设共抽样 N 点,并对 $X_a(jf)$ 做零阶近似得

$$X_a(jf) = T \sum_{n=0}^{N-1} x_a(nT) e^{-j2\pi fnT} \quad (3-47)$$

抽样过程如图 3-9 所示。

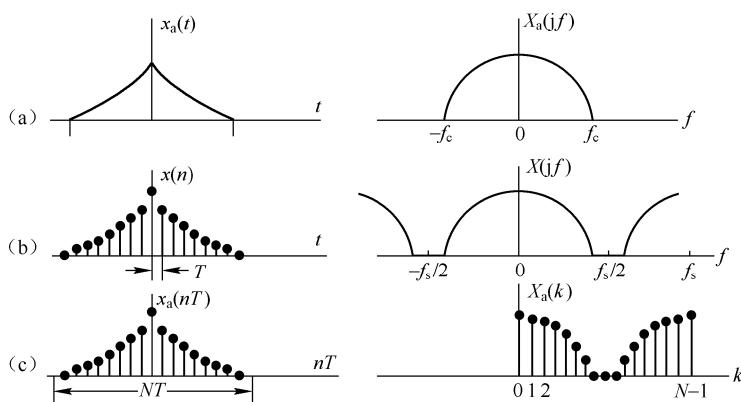


图 3-10 时域抽样和频域抽样

对 $X_a(jf)$ 在区间 $[0, f_s]$ 上等间隔抽样 N 点, 抽样间隔为 F , 这里 F 称为“频谱分辨率”, 显然满足如下关系

$$F = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{NT} = \frac{1}{T_p} \quad (3-48)$$

将 $f = kF$ 代入 $X_a(jf)$ 中, 可得 $X_a(jf)$ 的频率域抽样值 $X_a(jkF)$

$$X_a(jkF) = T \sum_{n=0}^{N-1} x_a(nT) e^{-j\frac{2\pi}{N} kn}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (3-49)$$

令

$$X_a(k) = X_a(jkF), \quad x(n) = x_a(nT)$$

则

$$X_a(k) = T \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = T \cdot \text{DFT}[x(n)] \quad (3-50)$$

与上述方法类似, 可以推出

$$\begin{aligned} x(n) &= x_a(nT) = F \sum_{k=0}^{N-1} X_a(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \\ &= FN \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_a(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \right] \\ &= \frac{1}{T} \text{IDFT}[X_a(k)] \end{aligned} \quad (3-51)$$

式 (3-50) 表明, 有限长连续信号 $x_a(t)$ 经过抽样后形成离散信号, 取其 DFT, 再乘以 T , 就可以得到其频谱的抽样值。如果时域抽样满足时域抽样定理, 信号频谱没有丢失, 可以通过 DFT 反变换的方法得到原抽样信号。

2. 时域和频域抽样过程中参数的选择

信号谱分析中通常关心两个方面的指标: 一是频谱分析范围; 二是频谱的分辨率。在已知信号的最高频率 f_c (谱分析范围) 时, 为避免在 DFT 运算中发生频率混叠现象, 要求抽样频率满足式

$$f_s \geq 2f_c \quad (3-52)$$

由式 (3-48) 可知, 频谱分辨率 $F = f_s / N$, 如果保持抽样点数 N 不变, 要提高频谱分辨率 (F 减小), 必须降低抽样频率, 但抽样频率的降低必然会引起谱分析范围的减小。如维持 f_s 不变, 为提高分辨率, 可以增加抽样点数 N , 因为 $NT = T_p$, $T = \frac{1}{f_s}$, 只有增加对信号的观察时间 T_p , 才能增加 N 。

N 和 T_p 可以按照式 (3-53) 和式 (3-54) 进行选择:

$$N \geq \frac{2f_c}{F_s} \quad (3-53)$$

$$T_p \geq \frac{1}{F} \quad (3-54)$$

【例 3-7】 对实信号进行谱分析, 已知信号最高频率 $f_c = 5\text{kHz}$, 若要求频谱分辨率 $F \leq 10\text{Hz}$, 试确定最小记录时间 T_{pmin} 、最大的抽样间隔 T_{max} 、最少的抽样点数 N_{min} 。如果 $f_c = 5\text{kHz}$ 不变, 要求频谱分辨率增大一倍时 ($F \leq 5\text{Hz}$), 求最少的抽样点数和最小的记录时间。

解: 由式 (3-54) 得

$$T_p \geq \frac{1}{F} = \frac{1}{10} = 0.1\text{s}$$

因此

$$T_{\text{pmin}} = 0.1\text{s}$$

因为要求 $f_s \geq 2f_c$, 所以

$$\begin{aligned} T_{\text{max}} &= \frac{1}{f_s} \leq \frac{1}{2f_c} = \frac{1}{2 \times 5000} = 0.1 \times 10^{-3}\text{s} = 0.1\text{ms} \\ N_{\text{min}} &= \frac{2f_c}{F} = \frac{2 \times 5000}{10} = 1000 \end{aligned}$$

为利用 FFT, N 通常取 2 的整数幂, 这里可取 $N = 2^{10} = 1024$ 。

当频谱分辨率增大一倍时,

$$T_{\text{pmin}} = \frac{1}{5} = 0.2\text{s}$$

$$N_{\text{min}} = \frac{2 \times 5000}{5} = 2000$$

可取 $N = 2^{11} = 2048$ 。

3. 用 DFT 进行频谱分析的误差

在用 DFT (FFT) 对连续信号和数字信号进行近似谱分析时, 把信号在时域和频域截断, 变成有限长信号; 在时域和频域进行抽样和周期性延拓。这样, 不可避免地产生了误差。误差主要反映在栅栏效应和频谱泄漏两个方面, 这里进行简要分析。

(1) 栅栏效应: 在利用 DFT 对连续时间信号处理时, 先对连续信号进行时域抽样, 得到离散信号, 再对其进行 DFT 得到 $X(k)$ 。显然 $X(k)$ 是 $x(n)$ 的 Z 变换在单位圆上的 N 点等间隔抽样, 也就是说, 通过这种近似的频谱分析, 只能计算出 N 个离散的频谱值, 各个抽样点之间的频谱值是不知道的。这种情况类似从 $N+1$ 个栅栏缝隙中观察信号的频谱情况, 仅得到 N 个缝隙间看到的频谱函数值。因此我们把这种现象称为栅栏效应。栅栏效应的存在使我们在谱分析过程中有可能漏掉一些重要的频率分量。为了把那些可能被漏掉的频谱分量检测出来, 可以采用在原序列尾部补零的方法增加序列长度 N , 即增加 DFT 变换的点数。这样, 可以增加频域抽样点数, 改变频率抽样点的位置, 使得原来被漏掉的某些频谱分量被检测出来, 从而减轻栅栏效应对谱分析的影响。

(2) 频谱泄漏: 对于持续时间很长的信号, 抽样点数太多以致无法存储和计算, 只好截断形成有限长序列后再进行 DFT。显然序列进行截断处理后, 其频谱与原频谱相比必定发生变化, 将发生频谱泄漏现象。现举例说明这一问题。

$$\text{设 } x(n) = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right), \text{ 其频谱为 } X(e^{j\omega}) = \pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[\delta\left(\omega - \frac{\pi}{4} - 2\pi l\right) + \delta\left(\omega + \frac{\pi}{4} - 2\pi l\right) \right]。$$

对 $x(n)$ 进行截断得到有限长序列 $y(n)$, 显然 $y(n)$ 是由 $x(n)$ 乘以矩形窗函数 $R_N(n)$ 后得到的, 即 $y(n) = x(n)R_N(n)$ 。根据频域卷积定理, 时域相乘频域相卷, 得到截断后的频谱

$$Y(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[y(n)] = \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) * R_N(e^{j\omega})$$

矩形窗函数 $R_N(n)$ 的频谱 $R_N(e^{j\omega})$ 如图 3-11 所示, 截断前后的信号频谱的变化如图 3-12 所示。

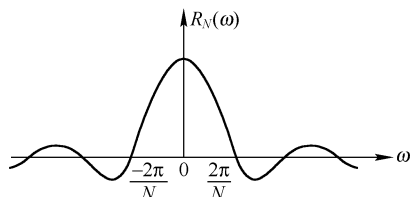


图 3-11 矩形窗函数的频谱

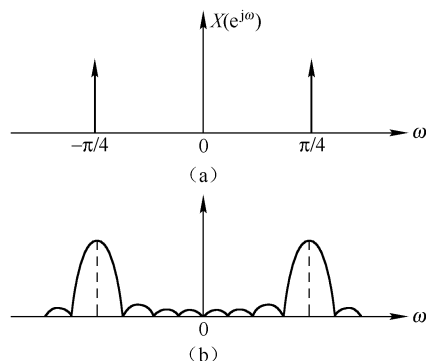


图 3-12 截断前后的信号频谱的变化

由图 3-12 可以看出, 原序列的频谱是离散的谱线, 经截断后, 原频谱的离散谱线向附近展宽。通

常,我们称这种展宽为频谱泄漏。频谱泄漏使频谱变得模糊,频谱分辨率降低。同时,在原主谱线两边形成很多旁瓣,引起不同频率分量间的干扰,从而影响频谱的分辨率,使频谱分析产生偏差。减少泄漏的方法有两种。一种是增加抽样点数,或者说使窗函数的长度增加,从而改善窗函数频谱的形状,减轻频谱泄漏的程度。当然抽样点数增加的同时必然导致运算量和存储容量的上升。另一种可以采用的解决方法是不加矩形窗,而是改用其他类型的窗函数与原序列相乘,以减轻频谱泄漏的影响。

3.6 本章小结

本章主要讲述研究有限长序列的重要数学工具——离散傅里叶变换(DFT)及其在实际中的应用。

在3.1节中介绍了周期序列的频谱分析方法——离散傅里叶级数(DFS),DFS和DFT在本质上是相同的。

在3.2节中重点介绍了有限长序列的离散傅里叶变换(DFT)的定义和计算方法,讨论了DFT与DFS之间的内在联系,然后又分析了序列傅里叶变换(FT)、序列Z变换(ZT)和离散傅里叶变换(DFT)之间的关系。由于DFT是连续频谱的等间隔抽样,其时域和频域均为离散值而便于用计算机进行计算,因此DFT成为信号分析和处理过程中极为重要的数学工具。

在3.3节中详细介绍了离散傅里叶变换(DFT)的主要性质,包括线性性质、循环移位性质、循环卷积性质和共轭对称性等,这些性质在以后的分析问题和实际应用中是非常重要的,应熟练理解掌握。

在3.4节中主要介绍频率域抽样定理,分析了频域抽样后不发生时域混叠的条件是频域抽样点数 N 应大于等于原序列的长度 M 。

在3.5节介绍了DFT的两个主要应用方向。第一,可以利用DFT的性质计算循环卷积和线性卷积,当循环卷积的点数大于两序列长度之和减1时,循环卷积可以代替线性卷积。第二,可以利用DFT对连续时间信号进行近似频谱分析。频谱分析是用DFT代替连续傅里叶变换,近似计算模拟信号的频谱,在近似谱分析过程中应掌握如何根据实际需要选择参数,并了解由于对序列进行截断而产生的截断效应(如频谱泄漏和栅栏效应等),以及减少这些截断效应而采取的措施。

习题3

基础习题

3-1 判断题。

- (1) 有限长序列的DFT是周期的。 ()
- (2) 序列的 N 点DFT是序列的傅里叶变换在单位圆上的 N 点等间隔抽样。 ()
- (3) 实序列的DFT具有共轭对称性质。 ()
- (4) 若序列 $x(n)$ 的长度为 M ,只有当频域抽样点数 $N \geq M$ 时,才可由 $x(n)$ 的 N 点DFT恢复 $x(n)$ 。 ()
- (5) 循环卷积和线性卷积是相等的。 ()
- (6) 用DFT对连续信号进行谱分析,会产生栅栏效应。 ()
- (7) 截断效应会导致频谱泄漏和谱间干扰。 ()
- (8) 栅栏效应和频率分辨率是同一个概念。 ()
- (9) 信号持续时间的长短和谱分辨率没有关系。 ()

3-2 选择题。

- (1) N 点IDFT具有隐含周期特性,周期是_____。

- A. $4N$ B. $3N$ C. $2N$ D. N
- (2) N 点 DFT 的共轭对称性是指关于_____的对称性。
A. $2N$ B. N C. $N/2$ D. 0
- (3) 若序列 $x(n)$ 和 $y(n)$ 的长度分别为 4、5, 要使 L 点循环卷积和线性卷积相等, 则 L 的最小值为_____。
A. 10 B. 9 C. 8 D. 7
- (4) 若 $X(k)$ 是 $x(n)$ 的 N 点 DFT, 则 $\text{DFT}[x^*(N-n)] = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
A. $X^*(n)$ B. $X^*(k)$ C. $X^*(N-k)$ D. $X(N-k)$
- (5) 若 $X(k)$ 是 $x(n)$ 的 N 点 DFT, 则 $\text{DFT}[x^*(n)] = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
A. $X^*(n)$ B. $X^*(k)$ C. $X^*(N-k)$ D. $X(N-k)$
- (6) 若序列 $x(n)$ 和 $y(n)$ 的长度分别为 N 、 M , 则它们的 L 点循环卷积和线性卷积相等的条件是_____。
A. $L \geq N + M - 1$ B. $L \geq N + M$ C. $L \geq N - M$ D. $L \geq N + M + 1$
- (7) 若序列长度为 M , 频域抽样点数为 N , 则频域抽样定理要求_____。
A. $N \geq M$ B. $N \leq M$ C. $N \geq 2M$ D. $N \leq 2M$
- (8) 关于栅栏效应和频率分辨率, 下列说法正确的是_____。
A. 相同的概念 B. 增加点数可以改善栅栏效应
C. 增加点数可以改善频率分辨率 D. 增加信号持续时间并不能改善频率分辨率

3-3 填空题。

- (1) $x(n)$ 的 N 点 DFT 是其 Z 变换在 () 上的 N 点等间隔抽样。
- (2) 已知 $X(k) = \text{DFT}[x(n)]_N$, $X(k)$ 的隐含周期为 ()。
- (3) 若 $x(n) = x_r(n) + jx_i(n)$, 则 $\text{DFT}[x_r(n)] = ()$ 。
- (4) 若 $x(n) = x_r(n) + jx_i(n)$, 则 $\text{DFT}[jx_i(n)] = ()$ 。
- (5) 若 $x(n) = x_{\text{ep}}(n) + x_{\text{op}}(n)$, 则 $\text{DFT}[x_{\text{ep}}(n)] = ()$ 。
- (6) 若 $x(n) = x_{\text{ep}}(n) + x_{\text{op}}(n)$, 则 $\text{DFT}[x_{\text{op}}(n)] = ()$ 。
- (7) 循环卷积等于线性卷积的条件是 ()。
- (8) 根据傅里叶变换的理论, 若信号持续时间有限长, 则其频谱 ()。
- (9) 根据傅里叶变换的理论, 若信号的频谱有限宽, 则其持续时间为 ()。

综合习题

3-4 计算题。

- (1) 计算 $x(n)=1$ 的 DFT。
- (2) 计算 $x(n)=\delta(n)$ 的 DFT。
- (3) 计算 $\text{DFT}[\delta(n-n_0)]$ 。
- (4) 已知 $x(n)=R_4(n)$, 求 $x(n)$ 的 4 点 DFT。
- (5) 已知 $x(n)=R_4(n)$, 求 $x(n)$ 的 8 点 DFT。
- (6) 计算 $x(n) = e^{j\frac{2\pi}{N}mn}$ 的 DFT ($0 < m < N$)。
- (7) 计算 $x(n) = e^{j\omega_0 n} R_N(n)$ 的 DFT。
- (8) 计算 $x(n) = \cos(\omega_0 n) R_N(n)$ 的 DFT。

3-5 已知两序列分别为 $x_1(n) = \{2, 2, 2, 2\}$, $x_2(n) = \{4, 3, 2, 1\}$, 试计算两序列的线性卷积及 4 点和 8 点循环卷积。

3-6 用微处理机对实信号做近似谱分析, 要求频谱分辨率 $F \leq 50\text{Hz}$, 信号最高频率为 1kHz , 试确定以下各参数:

- (1) 最小记录时间 T_{pmin} ;
- (2) 最大取样间隔 T_{max} ;
- (3) 最少抽样点数 N_{min} ;
- (4) 在频带宽度不变的情况下, 使频谱分辨率提高 1 倍 (F 缩小为一半) 的 N 值。

3-7 对实信号进行谱分析, 要求谱分辨率 $F \leq 10\text{Hz}$, 信号最高频率 $f_c = 2.5\text{kHz}$, 试确定最小记录时间 T_{pmin} 、最大的抽样间隔 T_{max} 、最少的抽样点数 N_{min} 。如果 f_c 不变, 要求谱分辨率提高 1 倍, 最少的抽样点数和最小的记录时间是多少?

3-8 已知调幅信号的载波频率为 1kHz , 调制信号频率 100Hz , 用 DFT 对其进行谱分析, 试求:

- (1) 最小记录时间 T_{pmin} ;
- (2) 最低抽样频率 f_{smin} 和最大抽样间隔 T_{max} ;
- (3) 最少抽样点数 N_{min} 。

3-9 证明题。

- (1) 证明 DFT 的对称定理, 即假设 $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$, 证明: $\text{DFT}[X(n)] = Nx(N-k)$ 。
- (2) 如果 $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$, 证明 DFT 的初值定理: $x(0) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)$ 。
- (3) 证明: 若 $x(n)$ 为实序列, $X(k) = \text{DFT}[x(n)]_N$, 则 $X(k)$ 为共轭对称序列, 即 $X(k) = X^*(N-k)$ 。
- (4) 证明: 若 $x(n)$ 实偶对称, 即 $x(n) = x(N-n)$, 且 $X(k) = \text{DFT}[x(n)]_N$, 则 $X(k)$ 也实偶对称。
- (5) 证明: 若 $x(n)$ 实奇对称, 即 $x(n) = -x(N-n)$, 且 $X(k) = \text{DFT}[x(n)]_N$, 则 $X(k)$ 为纯虚函数并奇对称。
- (6) 证明离散帕斯瓦尔定理: 若 $X(k) = \text{DFT}[x(n)]_N$, 则 $\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$ 。

第4章 快速傅里叶变换 (FFT)



学习重点

- ★ 了解直接计算 DFT 存在的问题和 FFT 算法的优势。
- ★ 熟练掌握按时间抽取的基-2FFT 算法原理。
- ★ 掌握按频率抽取的基-2FFT 算法原理。
- ★ 了解快速傅里叶反变换 (IFFT) 算法原理。
- ★ 了解 FFT 算法在工程上的应用。

4.1 引言

本书第3章引入了离散傅里叶变换 (DFT) 这一数学工具, DFT 在信号频谱分析及系统分析设计等诸多领域都有广泛的应用, 因此 DFT 在数字信号处理领域占有极为重要地位。然而在 DFT 的快速算法 (FFT) 提出以前, 直接利用 DFT 进行谱分析并实现信号实时处理是不切实际的, 主要原因在于 DFT 计算量过大, 而且随着序列长度 N 的增大, DFT 的计算量与 N 的平方成正比增大, 即使采用当时最先进的计算机来处理也无法实现信号的实时处理。因此, 在 DFT 算法提出后的很长时间内仅停留在理论研究阶段, 并没有真正得到广泛的实际应用。

长期以来, 人们一直在进行减少 DFT 计算量的研究和尝试, 直到 1965 年才取得巨大进展。J. W. Cooley (库利) 与 J. W. Turkey (图基) 在《计算数学》上发表了著名的论文《机器计算傅里叶级数的一种算法》, 在该论文中两人提出了一种计算 DFT 的快速算法 (现在所说的库利-图基算法), 该算法使得 DFT 的计算量下降了 1~2 个数量级。后来又有桑德-图基等算法的出现, 结合当时电子计算机技术的快速发展, 很快就发展与完善了一套高效的 DFT 快速算法, 也就是现在普遍称为 FFT (Fast Fourier Transform) 的算法, 使 DFT 的运算在实际中得到广泛应用, 也标志着数字信号处理这门新兴学科的正式诞生。可以说 FFT 算法在本门课程中占有很重要的地位。

人类的求知欲和科学的发展是永无止境的。多年来, 人们继续寻求更快、更灵活的高效算法, 各种 FFT 算法层出不穷, 使 DFT 的运算效率进一步提高。本章主要讨论最基本的也是最重要的基-2FFT 算法。

4.2 基-2 FFT 算法

4.2.1 直接计算 DFT 的特点及减少运算量的基本途径

1. 直接计算的问题

长度为 N 的有限长序列 $x(n)$ 的 N 点离散傅里叶变换 DFT 为

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (4-1)$$

反变换 (IDFT) 为

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (4-2)$$

由上面的表达式可以看出, 两者的差别只在于 W_N 的指数符号不同, 以及相差一个常数乘因子 $1/N$, 所以只需讨论其中一个式子的运算量即可, 下面选择式 (4-1) 讨论 DFT 的运算量。一般情况下, 时间序列 $x(n)$ 及其频谱序列 $X(k)$ 都为复序列, 由式 (4-1) 可以看出, 每计算一个 $X(k)$ 值, 需要一次复数乘法和一次复数加法。因为复数运算实际上是由实数运算来完成的, 一次复乘包含 4 次实乘, 2 次实加; 一次复加包含 2 次实加。计算 $X(k)$ 的一个值计算量为: $4N$ 次实乘, $4N-2$ 次实加。那么计算出 N 点序列 $X(k)$ 需要的计算量为: $4N^2$ 次实乘, $4N^2-2N$ 次实加。

从上面的统计可以看到, 直接计算 DFT, 乘法次数和加法次数都是与 N^2 成正比的, 当然, 这不是十分精确的关系, 如系数 $W_N^0 = 1$, $W_N^{N/2} = -1$, $W_N^{N/4} = -j$ 等就不需乘法。但当 N 很大时, 这些特例所占的比例基本可以忽略, 一般不考虑这种特殊情况。举例如表 4-1 所示。

表 4-1 N 点 DFT 的复数乘法次数举例

N	N^2	N	N^2
2	4	64	4049
4	16	128	16384
8	64	256	65536
16	256	512	262144
32	1028	1024	1048576

由以上分析可知, 当 DFT 计算的点数 N 很大时, 其运算量十分可观。对实时性要求很强的信号处理过程而言, 要求极高的计算速度, 因此需要改进 DFT 的计算方法, 以大大减少运算次数。

【例 4-1】 如果一台通用计算机平均每次复乘需 $100\mu\text{s}$, 每次复加需 $20\mu\text{s}$, 今用来直接计算 $N=1024$ 点的 DFT。问直接运算需多少时间?

解: 直接运算 N 点 DFT 共需复数乘法 N^2 次, 复数加法 $N(N-1)$ 次, 因此直接运算 DFT 所用的计算时间为

$$T_{\text{DFT}} = N^2 \times 100 + N(N-1) \times 20 = 125\ 808\ 640\mu\text{s} = 125.808\ 64\text{s}$$

本例中 DFT 的计算点数 N 为 1024, 而实际信号处理中序列点数 N 往往远大于这个值, 可见当 DFT 点数继续增加时, 其计算量将变得十分可观, 因此必须寻求减少计算量的途径来实现信号实时处理。

2. 改进途径

因为 DFT 的运算量与 N^2 成正比, 如果把较大点数 N 的 DFT 转换成小点的 DFT, 则可以使运算量相应地减少。

另外再次观察一下 DFT 的运算, 会发现 W_N^{nk} 因子有明显的周期性、对称性及可约性。表现为

$$\text{周期性: } W_N^{nk} = W_N^{(n+LN)k} = e^{-j\frac{2\pi}{N}(n+LN)k} = e^{-j\frac{2\pi}{N}nk(k+LN)} = W_N^{n(k+LN)}$$

$$\text{对称性: } W_N^{-nk} = W_N^{(N-n)k} = [W_N^{nk}]^* = W_N^{(N-k)n}$$

$$\text{可约性: } W_N^{nk} = W_{mN}^{nmk}, \quad W_N^{nk} = W_{N/m}^{nk/m}$$

$$\text{另外还有: } W_N^{N/2} = -1, \quad W_N^{(k+N/2)} = -W_N^k$$

因此, 可以利用上述的性质, 把长度为 N 点的大点数的 DFT 运算依次分解为若干小点数的 DFT。因为 DFT 的计算量正比于 N^2 , 若点数 N 小, 计算量也就小。

FFT 算法正是基于这样的基本思想发展起来的。它有多种形式, 但基本上可分为两大类: 按时间抽取法的 FFT 算法和按频率抽取法的 FFT 算法。

4.2.2 按时间抽取的基-2 FFT 的基本原理

按时间抽取的基-2 FFT 算法 (DIT-FFT), 又称为库利-图基算法, 是一种最典型的快速傅里叶变换算法, 下面来简要地分析其基本算法原理。

设序列 $x(n)$ 长度为 N , 且满足 $N = 2^M$, M 为正整数, 若不满足该条件, 则在序列后面加上若干零值以达到这个条件。按 n 的奇偶将 $x(n)$ 分解为两个 $\frac{N}{2}$ 点的子序列 (大点数 DFT 化成小点数 DFT, 通过求子序列的 DFT, 从而实现计算整个序列的 DFT)。当 n 为偶数时, 令 $n = 2r$, 得到第一个子序列, 记为 $x_1(r)$, 即 $x_1(r) = x(2r)$; 当 n 为奇数时, 令 $n = 2r + 1$, 得到第二个子序列, 记为 $x_2(r)$, 即 $x_2(r) = x(2r + 1)$;

$$\begin{cases} x(2r) = x_1(r) \\ x(2r+1) = x_2(r) \end{cases} \quad r = 0, 1, \dots, N/2 - 1$$

则序列 $x(n)$ 的 N 点 DFT

$$\begin{aligned} X(k) &= \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk} = \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ 为偶数}}}^{N-1} x(n)W_N^{nk} + \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ 为奇数}}}^{N-1} x(n)W_N^{nk} \\ &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r)W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1)W_N^{(2r+1)k} \\ &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(r)(W_N^2)^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2(r)(W_N^2)^{rk} \end{aligned} \quad (4-3)$$

由于 $W_N^2 = W_{N/2}$, 故式 (4-3) 重新写为

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(r)W_{N/2}^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2(r)W_{N/2}^{rk} \\ &= X_1(k) + W_N^k X_2(k) \end{aligned} \quad (4-4)$$

式中, $X_1(k)$ 与 $X_2(k)$ 分别为 $x_1(r)$ 及 $x_2(r)$ 的 $N/2$ 点 DFT。

$$\begin{cases} X_1(k) = \sum_{r=0}^{N/2-1} x_1(r)W_{N/2}^{kr} = \text{DFT}[x_1(r)]_{N/2} \\ X_2(k) = \sum_{r=0}^{N/2-1} x_2(r)W_{N/2}^{kr} = \text{DFT}[x_2(r)]_{N/2} \end{cases} \quad r = 0, 1, 2, \dots, N/2 - 1 \quad (4-5)$$

需要注意的是: $X_1(k)$ 与 $X_2(k)$ 分别是 $x_1(r)$ 及 $x_2(r)$ 的 $N/2$ 点 DFT, 以 $N/2$ 为周期; 所以由式 (4-4) 仅可以得到 N 点序列 $X(k)$ 的前 $N/2$ 点, 即

$$X(k) = X_1(k) + W_N^k X_2(k) \quad k = 0, 1, \dots, N/2 - 1$$

而 $X(k)$ 的后 $N/2$ 点为

$$X(k + N/2) = X_1(k + N/2) + W_N^{k+N/2} X_2(k + N/2) \quad k = 0, 1, \dots, N/2 - 1 \quad (4-6)$$

可利用周期性及 $W_N^{k+N/2} = -W_N^k$, 求得

$$X(k + N/2) = X_1(k) - W_N^k X_2(k) \quad k = 0, 1, \dots, N/2 - 1 \quad (4-7)$$

综合以上得到

$$\begin{cases} X(k) = X_1(k) + W_N^k X_2(k) \\ X(k + N/2) = X_1(k) - W_N^k X_2(k) \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots, N/2 - 1 \quad (4-8)$$

至此，完成了 N 点 DFT 到 $N/2$ 点 DFT 的转换。

下面引入蝶形运算符号，如图 4-1 所示。因为该运算符号的外形像一只蝴蝶，所以称为蝶形图，由图 4-1 可以看出，一个蝶形图包含 1 次复数乘法和 2 次复数加法的运算。

显然式（4-8）的运算关系可以用图 4-2 所示的蝶形运算来描述。

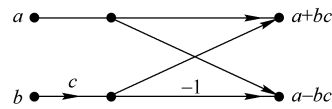


图 4-1 蝶形运算符号

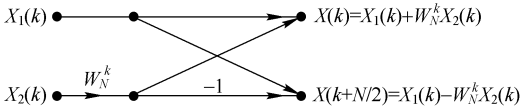


图 4-2 用蝶形运算符号表示 DFT 的分解运算

因此，只要求出 2 个 $N/2$ 点的 DFT 即 $X_1(k)$ 和 $X_2(k)$ ，再经过蝶形运算，就可求出全部 $X(k)$ 的值，运算量大大减少。

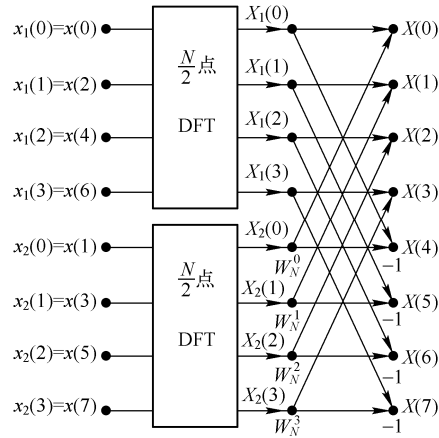


图 4-3 两个 $N/2$ 点 DFT 组成一个 N 点 DFT

以 $N=8$ 为例，分解为 2 个 4 点的 DFT，然后做 $8/2=4$ 次蝶形运算即可求出所有 8 点 $X(k)$ 的值。下面以 $N=8$ 为例，完整地介绍这种快速算法原理及相应的流程图。

现在来看一下，经过第一次分解转换以后计算量是否减少？减少了多少？由式（4-8）可以看出，计算一个 N 点的 DFT，首先需要计算 2 个 $N/2$ 点的 DFT，如图 4-3 所示。一个 $N/2$ 点的 DFT 需要 $\left(\frac{N}{2}\right)^2$ 次复乘， $\frac{N}{2}\left(\frac{N}{2}-1\right)$ 次复加，两个 $N/2$ 点 DFT 共需 $\frac{N^2}{2}$ 次复数乘法和 $N\left(\frac{N}{2}-1\right)$ 次复数加法。将 2 个 $N/2$ 点的 DFT 转换成一个 N 点的 DFT 还需要 $N/2$ 个蝶形运算（ $N/2$ 次复乘， N 次复加），如表 4-2 所示。

表 4-2 一次分解后的总计算量与直接计算计算量的比较

进行的运算	复数乘法次数	复数加法次数
一个 $N/2$ 点 DFT	$\left(\frac{N}{2}\right)^2$	$\frac{N}{2}\left(\frac{N}{2}-1\right)$
两个 $N/2$ 点 DFT	$\frac{N^2}{2}$	$N\left(\frac{N}{2}-1\right)$
一个蝶形运算	1	2
$N/2$ 个蝶形运算	$\frac{N}{2}$	N
一次分解后总计算量	$\frac{N^2}{2} + \frac{N}{2}$	$N\left(\frac{N}{2}-1\right) + N = \frac{N^2}{2}$
直接计算 N 点 DFT	N^2	$N(N-1)$

可见，通过这样分解后，计算一个 N 点的 DFT 需要 $\frac{N^2}{2}$ 次复加与 $\frac{N^2}{2} + \frac{N}{2}$ 次复乘。与直接计算 N 点的 DFT 计算量（ $N^2 - N$ 次复加与 N^2 次复乘）相比，几乎节省了一半的计算量，特别是当 N 较大时，这种分解带来的计算量下降程度是相当可观的。

既然这样分解对减少 DFT 的运算量是有效的, 且 $N = 2^M$, 因此 $\frac{N}{2}$ 仍然是 2 的整数次幂, 故可以对 $\frac{N}{2}$ 点 DFT 再做进一步分解。

与第一次分解相同, 将 $x_1(r)$ 按自变量 r 的奇偶分解成两个 $\frac{N}{4}$ 点的子序列 $x_3(l)$ 和 $x_4(l)$, 即

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_3(l) = x_1(2l) \\ x_4(l) = x_1(2l+1) \end{cases} \quad l = 0, 1, \dots, \frac{N}{4}-1 \\ X_1(k) = \sum_{l=0}^{N/4-1} x_1(2l)W_{N/2}^{2kl} + \sum_{l=0}^{N/4-1} x_1(2l+1)W_{N/2}^{k(2l+1)} \\ = \sum_{l=0}^{N/4-1} x_3(l)W_{N/4}^{kl} + W_{N/2}^k \sum_{l=0}^{N/4-1} x_4(l)W_{N/4}^{kl} \\ = X_3(k) + W_{N/2}^k X_4(k) \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{4}-1 \end{aligned} \quad (4-9)$$

$$\begin{cases} X_3(k) = \sum_{l=0}^{N/4-1} x_3(l)W_{N/4}^{kl} = \text{DFT}[x_3(l)]_{N/4} \\ X_4(k) = \sum_{l=0}^{N/4-1} x_4(l)W_{N/4}^{kl} = \text{DFT}[x_4(l)]_{N/4} \end{cases} \quad (4-10)$$

同理, 由 $X_3(k)$ 和 $X_4(k)$ 的周期性及 $W_{N/2}$ 的对称性最后得到:

$$\begin{cases} X_1(k) = X_3(k) + W_{N/2}^k X_4(k) \\ X_1(k + N/4) = X_3(k) - W_{N/2}^k X_4(k) \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots, N/4-1 \quad (4-11)$$

这个过程是将一个 $N/2$ 点 DFT 分解为两个 $N/4$ 点 DFT, 如图 4-4 所示。

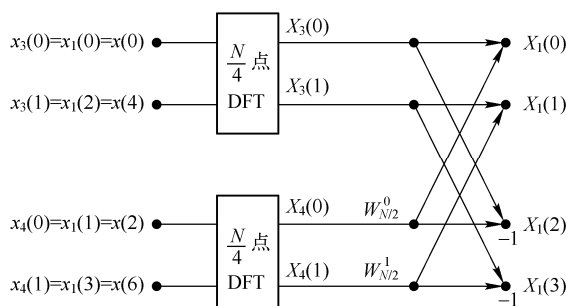


图 4-4 将一个 $N/2$ 点 DFT 分解为两个 $N/4$ 点 DFT

用同样的方法将 $x_2(r)$ 按自变量 r 奇偶分组得到 $x_5(l)$ 和 $x_6(l)$, 即

$$\begin{cases} x_5(l) = x_2(2l) \\ x_6(l) = x_2(2l+1) \end{cases} \quad l = 0, 1, \dots, N/4-1$$

而 $X_5(k)$ 和 $X_6(k)$ 分别是 $x_5(l)$ 和 $x_6(l)$ 的 $N/4$ 点 DFT, 即

$$\begin{cases} X_5(k) = \sum_{l=0}^{N/4-1} x_5(l)W_{N/4}^{kl} = \text{DFT}[x_5(l)]_{N/4} \\ X_6(k) = \sum_{l=0}^{N/4-1} x_6(l)W_{N/4}^{kl} = \text{DFT}[x_6(l)]_{N/4} \end{cases} \quad l = 0, 1, \dots, N/4-1 \quad (4-12)$$

同样可以利用蝶形运算计算出序列 $x_2(r)$ 的 $N/2$ 点 DFT $X_2(k)$ 为

$$\begin{cases} X_2(k) = X_5(k) + W_{N/2}^k X_6(k) \\ X_2(k + N/4) = X_5(k) - W_{N/2}^k X_6(k) \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots, N/4 - 1 \quad (4-13)$$

这样, 经过第二次分解, 实际上是将一个 N 点 DFT 分解成 4 个 $N/4$ 点 DFT, 这样便得到如图 4-5 所示的运算流程图。

因为 $N=8$, 所以图 4-5 中的 $N/4$ 点 DFT 就是 2 点 DFT, 下面分析一下 2 点 DFT 的运算特点, 以 $X_3(k)$ 为例, 显然按照 DFT 的定义有

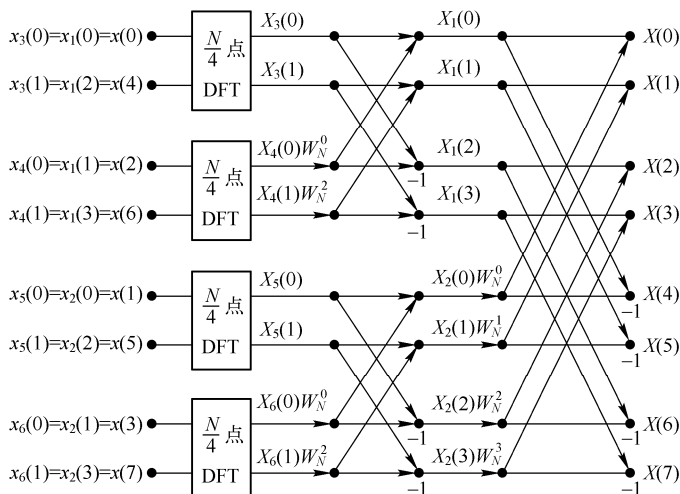


图 4-5 将一个 N 点 DFT 分解成 4 个 $N/4$ 点 DFT

$$X_3(k) = \sum_{l=0}^1 x_3(l) W_2^{lk} = x_3(0) W_2^0 + x_3(1) W_2^k = x_3(0) + x_3(1) W_2^k \quad (k = 0, 1)$$

即

$$\begin{cases} X_3(0) = x_3(0) + x_3(1) W_2^0 = x_3(0) + x_3(1) = x_3(0) + W_N^0 x_3(1) \\ X_3(1) = x_3(0) + x_3(1) W_2^1 = x_3(0) - x_3(1) = x_3(0) - W_N^0 x_3(1) \end{cases}$$

显然, 一个 2 点 DFT 也就是一个蝶形运算, 其运算流程图如图 4-6 所示。

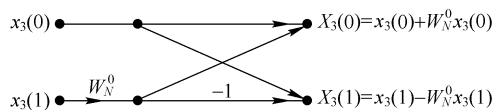


图 4-6 2 点 DFT 的蝶形运算流程图

依次类推, 其他 2 点 DFT $X_4(k)$ 、 $X_5(k)$ 和 $X_6(k)$ 均可用蝶形运算来表示。这样就将 2 点 DFT 的蝶形运算流程图移入图 4-5 中, 得到了一个完整的 $N=8$ 点 FFT 运算流程图, 如图 4-7 所示。

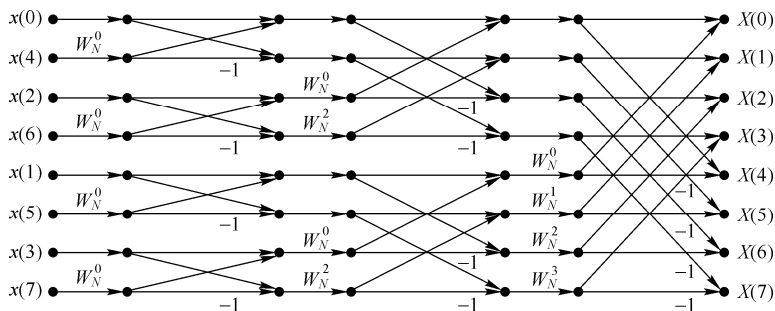


图 4-7 $N=8$ 点的按时间抽取基-2 FFT 运算流程图

4.2.3 DIT-FFT 算法特点与运算量

1. 蝶形运算

对于 $N = 2^M$ ，总可以通过 M 次分解最后成为 2 点的 DFT 运算，构成从 $x(n)$ 到 $X(k)$ 的 M 级运算过程。从如图 4-7 所示的 FFT 运算流图可看到，每一级运算都由 $N/2$ 个蝶形运算构成，而每个蝶形包含 1 次复乘和 2 次复加，因此每一级运算都需要 $N/2$ 次复乘和 N 次复加，这样，经过时间抽取后 M 级运算总共需要的运算次数为

$$\text{复乘次数: } \frac{N}{2} \cdot M = \frac{N}{2} \log_2 N$$

$$\text{复加次数: } N \cdot M = N \log_2 N$$

而直接计算 DFT 的复乘为 N^2 次，复加为 $N(N-1)$ 次。当 $N \gg 1$ 时， $N^2 \gg \frac{N}{2} \log_2 N$ ，所以，DIT-FFT 算法比直接计算 DFT 的运算次数大大减少。直接计算 DFT 与 FFT 算法的复数乘法计算量之比为 $N^2 / \frac{N}{2} \log_2 N$ ，如表 4-3 所示。

表 4-3 FFT 与 DFT 计算量的比较

N	N^2	$\frac{N}{2} \log_2 N$	$N^2 / \frac{N}{2} \log_2 N$	N	N^2	$\frac{N}{2} \log_2 N$	$N^2 / \frac{N}{2} \log_2 N$
2	4	1	4.0	128	16394	448	36.6
4	16	4	4.0	256	65536	1024	64.0
8	64	12	5.4	512	262114	2304	113.8
16	256	32	8.0	1024	1048576	5120	204.8
32	1024	80	12.8	2048	4194304	11264	372.4
64	4096	192	21.4				

【例 4-2】 用 FFT 算法处理一幅 $N \times N$ 点的二维图像，计算机每秒可做十万次复数乘法，问：当 $N=1024$ 时，在不考虑加法运算时间的前提下，需要多少时间完成运算？

解：显然，该计算机的计算速度为每次复数乘法用时 $\frac{1}{10^5} = 10\mu\text{s}$ ，因此当 $N=1024$ 时，用 FFT 算法所需的复数乘法次数约为

$$\frac{N^2}{2} \log_2 N \approx 10^7 \text{ 次}$$

总共用时为

$$T_{\text{FFT}} = 10^7 \times 10\mu\text{s} = 100\text{s}$$

而采用 DFT 算法时，所需的复数乘法次数为

$$(N^2)^2 = 1024^4 \approx 10^{12} \text{ 次}$$

总共用时为

$$T_{\text{DFT}} = 10^{12} \times 10\mu\text{s} = 10^7 \text{ s} \approx 2778 \text{ h}$$

通过以上分析可知，采用 FFT 算法所需时间仅为直接计算 DFT 所需时间的十万分之一，即直接计算需要近 3000h，采用 FFT 算法则只需要不到 2min。

2. 原位计算

当数据输入到存储器中以后，每一级运算的结果仍然存储在同一组存储器中，直到最后输出，中

间无须其他存储器，这叫原位计算。这种原位计算结构可节省存储单元，降低设备成本，还可节省寻址的时间。

3. 序数重排

对于按时间抽取 FFT 的原位计算结构，计算完毕后输出结果存储器中依次存放着 $X(0), X(1), X(2), \cdots, X(7)$ ，因此可直接按顺序输出而不必调整次序。但这种原位计算的输入 $x(n)$ 却不能按这种自然顺序存入存储单元中，而是按 $x(0), x(4), x(2), x(6), \cdots, x(7)$ 的顺序存入存储单元的，这种顺序表面看起来相当杂乱，然而它也是有规律的。当用二进制表示这个顺序时，它正好是“码位倒置”的顺序。例如，原来的自然顺序应是 $x(1)$ 的地方，现在放着 $x(4)$ ； $x(3)$ 的地方，现在放着 $x(6)$ 。当用二进制码来表示这一规律时，则是在 $x(001)$ 处放着 $x(100)$ ，而 $x(011)$ 处放着 $x(110)$ ，依次类推，如表 4-4 所示。

表 4-4 码位倒置顺序

顺 序		倒 序	
十进制数 I	二进制数	二进制数	十进制数 J
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

在实际运算中，一般直接将输入数据 $x(n)$ 按码位倒置的顺序排好输入很不方便，总是先按自然顺序输入存储单元，然后再通过变址运算将自然顺序的存储转换成码位倒置顺序的存储，然后进行 FFT 的原位计算。目前有许多通用 DSP 芯片支持这种码位倒置的寻址功能。

4. 蝶形运算两个输入数据的“距离”

以如图 4-7 所示的 8 点 DIT-FFT 为例，其输入是倒位序的，输出是自然顺序的。当 $N = 2^M$ 时，则共有 M 级蝶形运算。第 L 级运算，每个蝶形的两个输入数据的“距离”为 2^{L-1} 。

5. 旋转因子的变化规律

在图 4-7 中，每级都有 $N/2$ 个蝶形，每个蝶形都要乘以因子，称其为旋转因子 W_N^p ，其中 p 称为旋转因子的指数。第 L 级蝶形运算，共有 2^{L-1} 个不同的旋转因子。

例如，当 $N=8$ 时，

$L=1$ （第一级）：有 1 个旋转因子，为 $W_N^p = W_N^0$ ；

$L=2$ （第二级）：有 2 个旋转因子，分别为 $W_N^p = W_N^0, W_N^1$ ；

$L=3$ （第三级）：有 4 个旋转因子，分别为 $W_N^p = W_N^0, W_N^1, W_N^2, W_N^3$ ；

一般地，第 L 级共有 2^{L-1} 个旋转因子，分别为 $W_N^p = W_N^0, W_N^1, W_N^2, \cdots, W_N^J (J = 2^{L-1} - 1)$ 。

4.2.4 按频域抽取的基-2 FFT 的基本原理

前面提到 DIT-FFT 算法的思想是在时域内将序列 $x(n)$ 按照 n 的奇偶把较大 N 点的 DFT 转换成较小点 DFT 的快速算法。与之相对应，基-2FFT 还有另外一类算法，其思想是在频域中将 $X(k)$ 按照 k 的奇偶划分成较短子序列，从而减少计算量，称为按频域抽取的 FFT 算法，简称 DIF-FFT。这一算法是 1966 年由桑德提出的，因此又称为桑德-图基算法。

设序列 $x(n)$ 的长度为 $N = 2^M$, M 为正整数 (若不满足该条件, 则在序列后面加上若干零值来达到这个条件)。将 $x(n)$ 前后对半分, 得到两个子序列 $x(n)$ 和 $x\left(n + \frac{N}{2}\right)$, $n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1$ 。则 $x(n)$ 的 N 点 DFT 可表示为

$$\begin{aligned} X(k) &= \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^k \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) W_N^{kn} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) W_N^{kn} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x\left(n + \frac{N}{2}\right) W_N^{k(n+N/2)} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} \left[x(n) + W_N^{kN/2} x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^{kn} \end{aligned} \quad (4-14)$$

式中, $W_N^{kN/2} = (-1)^k = \begin{cases} 1 & k = \text{偶数} \\ -1 & k = \text{奇数} \end{cases}$ 。

将 $X(k)$ 按自变量 k 分解成偶数组 $X(2r)$ 和奇数组 $X(2r+1)$, 其中 $r = 0, 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}$, 则 $X(2r)$ 和 $X(2r+1)$ 分别为

$$\begin{cases} X(2r) = \sum_{n=0}^{N/2-1} \left[x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^{2rn} = \sum_{n=0}^{N/2-1} \left[x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_{N/2}^{rn} \\ X(2r+1) = \sum_{n=0}^{N/2-1} \left[x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^{n(2r+1)} = \sum_{n=0}^{N/2-1} \left\{ \left[x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^n \right\} \cdot W_{N/2}^{nr} \end{cases} \quad (4-15)$$

令

$$\begin{cases} x_1(n) = x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) \\ x_2(n) = \left[x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^n \end{cases} \quad n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (4-16)$$

显然 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 均为 $N/2$ 点序列, 将式 (4-16) 代入式 (4-15), 得

$$\begin{cases} X(2r) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_1(n) W_{N/2}^{rn} = \text{DFT}[x_1(n)]_{N/2} \\ X(2r+1) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_2(n) W_{N/2}^{nr} = \text{DFT}[x_2(n)]_{N/2} \end{cases} \quad r = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (4-17)$$

式 (4-17) 表明, $X(k)$ 按 k 值的奇偶分为两组, 其偶数组是 $x_1(n)$ 的 $N/2$ 点 DFT, 奇数组则是 $x_2(n)$ 的 $N/2$ 点 DFT。 $x_1(n)$ 、 $x_2(n)$ 和 $x(n)$ 之间的关系也可用如图 4-8 所示的蝶形运算流程图符号表示, 该蝶形运算与按时间抽选的 FFT 算法中的蝶形运算符号略有不同。

至此就把 N 点的 DFT 分解成两个 $N/2$ 点的 DFT 运算, 图 4-9 以 $N=8$ 为例描述了第一步的分解过程。

与时间抽取法 (DIT-FFT) 的推导过程一样, 由于 $N = 2^M$, 所以 $N/2$ 仍然是 2 的整数次幂, 因而可以将每个 $N/2$ 点 DFT 的输出再分解为偶数组与奇数组, 这样就将 $N/2$ 点 DFT 进一步分解为两个 $N/4$ 点 DFT, 完成了对 DFT 的第二次分解。

若 $N=8$, 则经过第二次分解后所对应的蝶形运算流程图如图 4-10 所示。

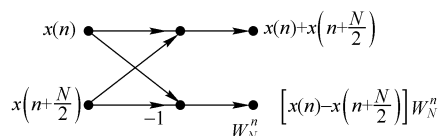


图 4-8 另一种形式的蝶形运算符号

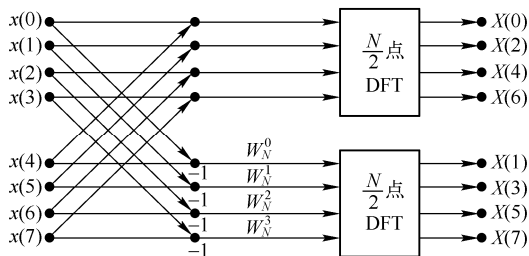


图 4-9 按频率抽取法将 N 点 DFT 分解为两个 $N/2$ 点 DFT

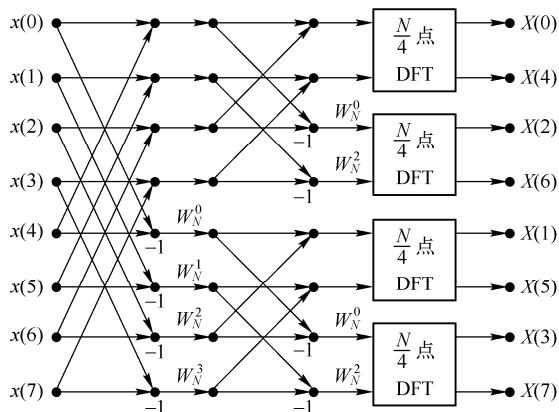


图 4-10 按频率抽取法将 N 点 DFT 分解为 4 个 $N/4$ 点 DFT

因为 $N=8$, 所以 $N/4$ 点 DFT (2 点 DFT) 也就是一个蝶形运算。将每个 $N/4$ 点 DFT 表示为蝶形运算符号后, 便得到如图 4-11 所示的按频率抽取 FFT 算法完整分解流程图。

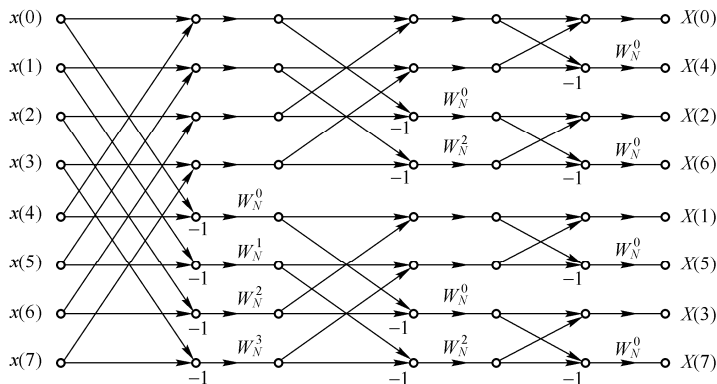


图 4-11 $N=8$ 点 DIF-FFT 运算流程图

下面简要分析 DIF-FFT 算法的特点与运算量。

1. 蝶形运算

从图 4-11 中可以看出, 与 DIT-FFT 算法一样, DIF-FFT 的基本运算单元也是蝶形运算。

由流程图可以看出 $N=2^M$ 的 FFT 运算需要 M 级蝶形运算, 每一个蝶形有 $N/2$ 个蝶形单元, 每个蝶形单元需要 2 次复加和 1 次复乘, 所以 $N=2^M$ 点 FFT 运算共需要:

$$\text{复乘: } \frac{N}{2} \cdot M = \frac{N}{2} \log_2 N;$$

$$\text{复加: } N \cdot M = N \log_2 N;$$

与 DIT-FFT 算法的运算量完全相同。

2. 原位计算

类似于时间抽取法, 当数据输入到存储器中后, 每一级运算的结果仍然存储在同一组存储器中, 直到最后输出, 中间无须其他存储器, 所以频域抽取法也可进行原位计算。

3. 序数重排

DIF-FFT 的输入正好是自然顺序, 而输出却是码位倒置的顺序。因此运算完毕后, 要通过变址运

算将码位倒置的顺序转换为自然顺序, 然后输出, 变址方法同时间抽取法。

4. 蝶形类型随迭代次数成倍减少 (与时间抽取法相反)

第一级迭代中有 $N/2$ 种蝶形运算系数, 参加蝶形运算的两个数据相隔 $N/2$, 随后每次迭代, 蝶形类型比前一级减少一半, 间距也减少一半, 最后一级迭代, 蝶形类型只有一种 W_N^0 , 数据间隔为 1。

由这几规律可以看出, 频率抽取法与时间抽取法是两种等价的 FFT 运算。

4.2.5 IDFT 的高效算法

前面重点讨论了 DFT 正变换的快速算法, 对于反变换 IDFT 来说, 这些快速算法是否也适用呢?

首先对 DFT 与 IDFT 在定义式上进行比较。

$$\text{反变换: } x(n) = \text{IDFT}[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} \quad (4-18)$$

$$\text{正变换: } X(k) = \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \quad (4-19)$$

由定义式可见, DFT 与 IDFT 两者非常相似, 仅有以下三点差别。

- (1) IDFT 比 DFT 多了一个常系数因子 $1/N$ 。
- (2) 旋转因子一个为 W_N^{nk} , 一个为 W_N^{-nk} , 仅相差一个指数的正负号。
- (3) 输入变量不同, 一个为 $x(n)$, 另一个为 $X(k)$ 。

根据以上特点, 要想由 FFT 算法得到 IFFT 算法, 需要做以下改变。

- (1) 将 FFT 算法中旋转因子 W_N 变为 W_N^{-1} 。

- (2) 在 FFT 的每级蝶形运算中都分别乘以因子 $\frac{1}{2}$ 。

(3) 输入变量的改变, 对整体算法的实现影响不大, 但算法名称有相应变化。如在 FFT 算法中本来是按时间抽选的, 现在经过上述改变以后对应的则是按频率抽选的 IFFT 算法。

基于以上三点便可得到如图 4-12 所示的 IFFT 运算流程图。

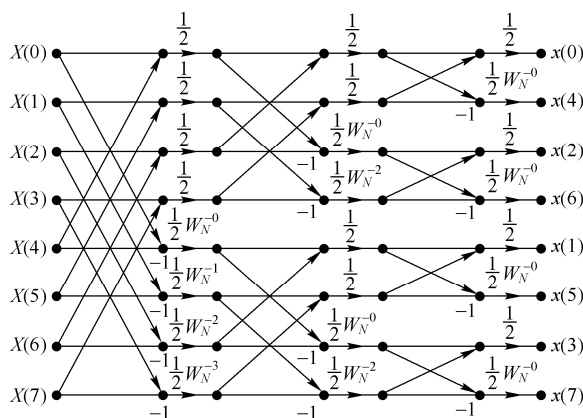


图 4-12 IFFT 运算流程图

上述 IFFT 算法虽然已经很简单了, 但是仍需要对 FFT 算法程序及参数进行一些改动, 那么是否可以直接运用 FFT 来实现 IFFT 呢?

下面对 DFT 的定义式做一些变换:

$$\begin{aligned}
 \text{IDFT}[X(k)] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} \\
 &= \frac{1}{N} \left[\sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) (W_N^{-nk})^* \right]^* \\
 &= \frac{1}{N} \left[\sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) W_N^{nk} \right]^*
 \end{aligned}$$

因此

$$\text{IFFT}[X(k)] = \frac{1}{N} \{ \text{FFT}[X^*(k)] \}^*$$

从上面的表达式可以看到, 完全不需要改动 FFT 程序, 而是直接利用它做 IFFT, 分为以下三个步骤:

- ① 将 $X(k)$ 取共轭得到 $X^*(k)$;
- ② 然后对 $X(k)$ 的共轭 $X^*(k)$ 直接做 FFT (采用 FFT 算法程序);
- ③ 最后再对 FFT 的运算结果取共轭并乘以 $\frac{1}{N}$, 得到 $x(n)$ 。

采用这种方法来计算反变换 IFFT 虽然用了两次取共轭运算, 但可以与 FFT 公用同一子程序, 因而用起来很方便。

4.3 应用实例

目前, FFT 已经广泛应用在频谱分析、匹配滤波、数字通信、图像处理、语音识别、雷达处理、遥感遥测、地质勘探和无线保密通信等众多领域。但不论 FFT 应用在哪里, 一般都以卷积积分或相关积分的具体处理为依据, 或者以用 FFT 作为连续傅里叶变换的近似为基础。

第3章中讲述了利用 DFT 的卷积性质求序列的循环卷积 (圆周卷积) 的方法。而 FFT 作为 DFT 的快速算法, 同样可以用来计算循环卷积。又因为在一定条件下 ($L \geq M + N - 1$) 循环卷积与线性卷积的结果相同, 因此可以利用 FFT 来计算序列的线性卷积, 从而大大提高运算效率。

利用 FFT 计算线性卷积的步骤如下:

- (1) 设两序列原长度分别 M 和 N , 将长度增加到 $L \geq M + N - 1$;
- (2) 用 FFT 法求加长序列的 DFT 频谱;
- (3) 计算两序列 DFT 频谱的乘积;
- (4) 用 IFFT 求 DFT 频谱乘积的逆变换, 便得两序列的线性卷积。

在利用 FFT 来计算卷积时, 当两序列的长度相差较大时, 长度小的序列就需要补很多的零点, 因此需要较大的存储量, 同时运算时间也会变长。为解决以上问题, 常采用重叠相加法进行计算, 以提高计算的效率, 减小存储空间。下面对该方法进行简单介绍。

设 $h(n)$ 的长度 N , 而 $x(n)$ 为无限长, 将 $x(n)$ 分解为无数个长度为 M 的子段 $x_k(n)$, 则两序列的线性卷积可以写成如下形式:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=0}^{M-1} x(m)h(M-m) + \sum_{m=M}^{2M-1} x(m)h(M-m) + \cdots + \sum_{m=kM}^{(k+1)M-1} x(m)h(M-m) + \cdots$$

为便于计算, 将每一子段 $x_k(n)$ 的尾部补零, 使其长度增加为 $L = M + N - 1$ 。则各子段中前一子段的尾部与后一子段的首部有 $N - 1$ 项是重叠的, 对重叠部分的卷积须做相加计算, 故称为重叠相加法。

重叠相加法的步骤如下:

- (1) 将 $h(n)$ 补零延长到 $L = N + M - 1$, 计算其 FFT, 得到 $H(k)$;

- (2) 将各子段 $x_k(n)$ 补零延长到 $L = M + N - 1$ ，计算其 FFT，得到 $X_k(k)$ ；
- (3) 计算 $Y_k(k) = X_k(k)H(k)$ ；
- (4) 计算反变换 $y_k(n) = \text{IFFT}[Y_k(k)]$ ；
- (5) 将 $y_k(n)$ 的重叠部分相加，最后得到结果

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k(n)$$

重叠相加法的卷积示意图如图 4-13 所示。

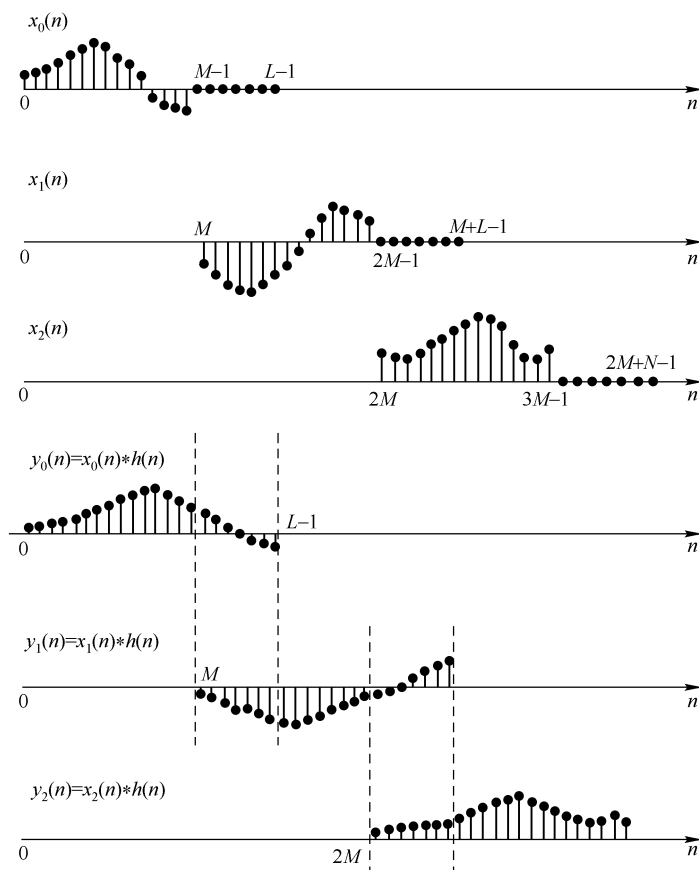


图 4-13 重叠相加法的卷积示意图

4.4 MATLAB 仿真

FFT 是 DFT 的快速算法，凡是可以利用离散傅里叶变换 (DFT) 来进行分析计算的场合，都可以利用 FFT 算法及数字信号处理技术加以实现。FFT 在数字通信、语音信号处理、数字图像处理、匹配滤波及功率谱估计、系统分析与仿真等诸多领域都得到了广泛的应用。

4.4.1 利用 FFT 求圆周卷积和线性卷积

【例 4-3】 已知序列 $x(n) = \sin(0.4n)R_{15}(n)$ ， $h(n) = 0.9^n R_{20}(n)$ ，试利用快速卷积法计算这两个序列的卷积 $y(n) = x(n) * h(n)$ 。

解: 程序如下:

```
Nx=15;Nh=20;
n1=1:Nx-1;n2=0:Nh-1;
xn=sin(0.4*n1).*(n1>=0 &n1<Nx); % 产生序列 x(n)
hn=0.9.^n2.*(n2>=0 &n2<Nh); % 产生序列 h(n)
L=pow2(nextpow2(Nx+Nh-1)); % 序列 x(n)和 h(n) 卷积后得到序列 y(n) 的长度
Xk=fft(xn,L); % 对序列 x(n)作 L 点 DFT
Hk=fft(hn,L); % 对序列 h(n)作 L 点 DFT
yn=ifft(Xk.*Hk);
subplot(3,1,1);
stem(xn,'.');
title('x(n)');
subplot(3,1,2);
stem(hn,'.');
title('h(n)');
subplot(3,1,3);
stem(yn,'.');
title('y(n)');
```

例 4-3 的运行结果如图 4-14 所示。

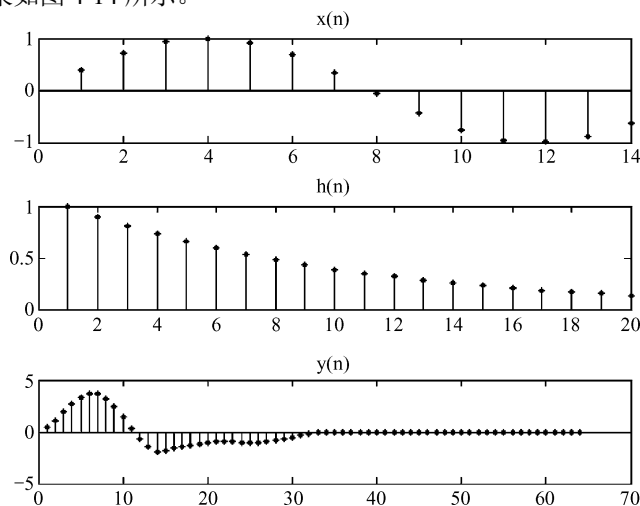


图 4-14 例 4-3 的运行结果

4.4.2 利用 FFT 进行频谱分析

【例 4-4】 已知非周期序列 $x(n) = 0.9^n u(n)$, 用 MATLAB 画出其时域波形, 并用 FFT 对其进行频谱分析, 抽样点数 $N=128$ 。

程序如下。

```
clear all
N=128;
n=0:N-1;
xn=0.9.^n;
XK=fft(xn,N);
magXK=abs(XK);
phaXK=angle(XK);
subplot(1,2,1);
```



```

plot(n,xn);
xlabel('n');ylabel('x(n)');
title('x(n) N=128');
subplot(1,2,2);
k=0:length(magXK)-1;
stem(k,magXK,'. ');
xlabel('k');ylabel('|X(k)|');
title('X(k) N=128');

```

例 4-4 的运行结果如图 4-15 所示。

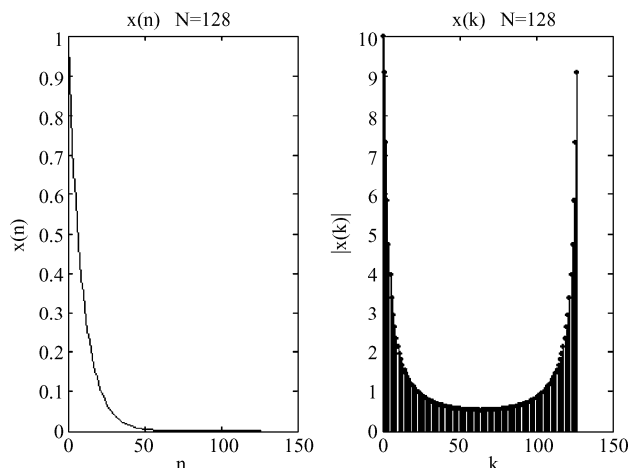


图 4-15 例 4-4 的运行结果

【例 4-5】 已知连续时间信号 $x_6(t) = \cos 8\pi t + \cos 16\pi t + \cos 20\pi t$ ，选择抽样频率 $f_s = 64\text{Hz}$ ，变换区间 $N=16, 32, 64$ 三种情况进行谱分析，分别打印其幅频特性，并进行分析和讨论。

解：程序如下。

```

Fs=64;T=1/Fs;
N=16;n=0:N-1; %FFT 的变换区间 N=16
x6nT=cos(8*pi*n*T)+cos(16*pi*n*T)+cos(20*pi*n*T); %对 x6(t)16 点抽样
X6k16=fft(x6nT); %计算 x6nT 的 16 点 DFT
X6k16=fftshift(X6k16); %将零频率移到频谱中心
Tp=N*T;F=1/Tp; %频率分辨率 F
k=-N/2:N/2-1;fk=k*F; %产生 16 点 DFT 对应的抽样点频率 (以零频率为中心)
subplot(3,1,1);stem(fk,abs(X6k16),' ');box on %绘制 8 点 DFT 的幅频特性图
title('16 点|DFT[x(nT)]|');xlabel('f(Hz)');ylabel('幅度');
axis([-N*F/2-1,N*F/2-1,0,1.2*max(abs(X6k16))])
N=32;n=0:N-1; %FFT 的变换区间 N=16
x6nT=cos(8*pi*n*T)+cos(16*pi*n*T)+cos(20*pi*n*T); %对 x6(t)32 点抽样
X6k32=fft(x6nT); %计算 x6nT 的 32 点 DFT
X6k32=fftshift(X6k32); %将零频率移到频谱中心
Tp=N*T;F=1/Tp; %频率分辨率 F
k=-N/2:N/2-1;fk=k*F; %产生 16 点 DFT 对应的抽样点频率 (以零频率为中心)
subplot(3,1,2);stem(fk,abs(X6k32),' ');box on %绘制 8 点 DFT 的幅频特性图
title('32 点|DFT[x(nT)]|');xlabel('f(Hz)');ylabel('幅度');
axis([-N*F/2-1,N*F/2-1,0,1.2*max(abs(X6k32))])
N=64;n=0:N-1; %FFT 的变换区间 N=16
x6nT=cos(8*pi*n*T)+cos(16*pi*n*T)+cos(20*pi*n*T); %对 x6(t)64 点采
X6k64=fft(x6nT); %计算 x6nT 的 64 点 DFT

```

```

X6k64=fftshift(X6k64);           %将零频率移到频谱中心
Tp=N*T;F=1/Tp;                   %频率分辨率 F
k=-N/2:N/2-1;fk=k*F;             %产生 16 点 DFT 对应的抽样点频率 (以零频率为中心)
subplot(3,1,3);stem(fk,abs(X6k64),' '); box on %绘制 8 点 DFT 的幅频特性图
title(' 64 点 |DFT[x(nT)] | ');xlabel('f(Hz)');ylabel('幅度');
axis([-N*F/2-1,N*F/2-1,0,1.2*max(abs(X6k64))])

```

例 4-5 的运行结果如图 4-16 所示。

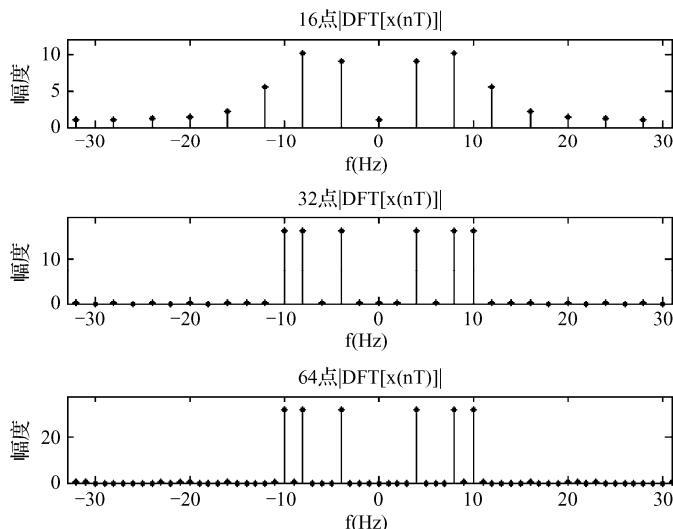


图 4-16 例 4-5 的运行结果

4.5 本章小结

本章从 DFT 的定义出发, 结合示例讲述了时域抽取和频域抽取基-2FFT 算法的原理、高效率计算 IDFT 的方法, 以及 FFT 的典型应用等内容, 其要点小结如下。

(1) 减少 DFT 计算量的方法: 利用 W_N^k 的性质将较大点数的 DFT 不断分解为较小点数的 DFT。

W_N^k 的性质: 周期性: $W_N^{nk} = W_N^{(n+IN)k} = e^{-j\frac{2\pi}{N}(n+IN)k} = e^{-j\frac{2\pi}{N}n(k+IN)} = W_N^{n(k+IN)}$

对称性: $W_N^{-nk} = W_N^{(N-n)k} = [W_N^{nk}]^* = W_N^{(N-k)n}$

可约性: $W_N^{nk} = W_{mN}^{nmk}$, $W_N^{nk} = W_{N/m}^{nk/m}$

特殊点: $W_N^{N/2} = -1$, $W_N^{(k+N/2)} = -W_N^k$

(2) DIT-FFT 的算法原理: 基本思想是按 n 的奇偶不断地将 $x(n)$ 分解为较短的子序列, 最后完全分解为蝶形运算, 从而减少计算量。

(3) DIF-FFT 的算法原理: 基本思想是在频域中将 $X(k)$ 按照 k 的奇偶分解为较短的子序列, 最后完全分解为蝶形运算, 从而减少计算量。

(4) 反变换的快速算法 (IFFT), 可采用如下公式计算

$$x(n) = \text{IDFT}[X(k)] = \frac{1}{N} \{ \text{DFT}[X^*(k)] \}^*$$

(5) FFT 的应用: FFT 是 DFT 的快速算法, 可用于计算序列的循环卷积和线性卷积, 也可进行信号的频谱分析。

习题 4

基础习题

4-1 选择题

(1) 在基-2 DIT-FFT 运算中, 通过不断地将长序列的 DFT 分解成短序列的 DFT, 最后达到 2 点 DFT 来降低运算量。若有一个 64 点的序列进行基-2 DIT-FFT 运算, 需要_____级的分解方能完成运算。

- A. 32 B. 6 C. 16 D. 8

(2) 在基-2 DIT-FFT 运算时, 需要对输入序列进行倒序, 若进行计算的序列点数 $N=16$, 倒序前信号点序号为 8, 则倒序后该信号点的序号为_____。

- A. 8 B. 16 C. 1 D. 4

(3) 在时域抽取 FFT 运算中, 要对输入信号 $x(n)$ 的排列顺序进行“扰乱”。在 16 点 FFT 中, 原来 $x(9)$ 的位置扰乱后信号为_____。

- A. $x(7)$ B. $x(9)$ C. $x(1)$ D. $x(15)$

(4) 用按时间抽取 FFT 计算 N 点 DFT 所需的复数乘法次数与_____成正比。

- A. N B. N^2 C. N^3 D. $N\log_2 N$

(5) 直接计算 N 点 DFT 所需的复数乘法次数与_____成正比。

- A. N B. N^2 C. N^3 D. $N\log_2 N$

(6) N 点 FFT 所需的复数乘法次数为_____。

- A. N B. N^2 C. N^3 D. $(N/2)\log_2 N$

(7) 下列关于 FFT 的说法中, 错误的是_____。

- A. FFT 是一种新的变换
B. FFT 是 DFT 的快速算法
C. FFT 基本上可以分成时间抽取法和频率抽取法两类
D. 基-2 FFT 要求序列的点数为 2^L (其中 L 为整数)

(8) 不考虑某些旋转因子的特殊性, 一般一个基-2 FFT 算法的蝶形运算所需的复数乘法及复数加法次数分别为_____。

- A. 1 和 2 B. 1 和 1 C. 2 和 1 D. 2 和 2

(9) 计算 $N=2^L$ (L 为整数) 点的按时间抽取基-2 FFT 需要_____级蝶形运算。

- A. L B. $L/2$ C. N D. $N/2$

(10) 基-2 FFT 算法的基本运算单元为_____。

- A. 蝶形运算 B. 卷积运算 C. 相关运算 D. 延时运算

(11) 计算 256 点的按时间抽取基-2 FFT, 在每一级有_____个蝶形。

- A. 256 B. 1024 C. 128 D. 64

(12) 求序列 $x(n)$ 的 1024 点基-2 FFT, 需要_____次复数乘法。

- A. 1024 B. 1024×1024 C. 512×10 D. 1024×10

综合习题

4-2 如果一台通用计算机的速度为平均每次复乘需 $100\mu\text{s}$, 每次复加需 $20\mu\text{s}$, 今用来计算 $N=1024$ 点的 DFT $[x(n)]$, 问用直接运算需要多少时间? 用 FFT 运算需要多少时间?

4-3 画出 $N=16$ 点 DIT-FFT 算法原理图。

4-4 画出 $N=16$ 点 DIF-FFT 算法原理图。

4-5 已知 $X(k)$ 、 $Y(k)$ 是两个 N 点实序列 $x(n)$ 、 $y(n)$ 的 DFT 值, 现需要从 $X(k)$ 、 $Y(k)$ 求 $x(n)$ 、 $y(n)$ 值, 为了提高运算效率, 试设计用一个 N 点 IFFT 运算一次完成。

4-6 已知 $X(k)$, $k=0,1,\cdots,2N-1$, 是 $2N$ 点实序列 $x(n)$ 的 DFT 值, 现在需要由 $X(k)$ 求 $x(n)$ 值, 为提高运算效率, 试设计用一个 N 点 IFFT 运算一次完成。

4-7 设 $x(n) = \{1-2j, 3, 1+2j, 1\}$, 试画出按时域抽取的基-2 FFT 运算流图, 并根据流图计算每个蝶形运算的结果, 最后写出 $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$ 的序列值。

4-8 已知序列 $x(n) = \{0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0\}$, 用 FFT 蝶形运算方法计算其 8 点 DFT, 画出计算流图, 标出各节点数值。

第5章 无限长单位脉冲响应(IIR)数字滤波器的设计



学习重点

- ★ 掌握数字滤波器的类型、性能指标及数字滤波器设计的基本步骤。
- ★ 熟悉原型模拟滤波器特性、原理及设计步骤(主要是巴特沃斯模拟低通型)。
- ★ 掌握冲激响应不变法设计 IIR 数字滤波器的基本原理与应用。
- ★ 掌握双线性变换法设计 IIR 数字滤波器的基本原理与应用。
- ★ 掌握模拟域频率变换法设计 IIR 数字滤波器(低通、高通、带通、带阻)。
- ★ 掌握数字域频率变换法设计 IIR 数字滤波器(低通、带通、带阻、高通)。

5.1 引言

滤波器设计主要分为两大类,一类是无限长单位脉冲响应(IIR)数字滤波器,另一类是有限长单位脉冲响应(FIR)数字滤波器,后者安排在第6章专门讨论。无限长单位脉冲响应(IIR)数字滤波器,属于递归型滤波器。设计这类滤波器的一种主要方法是借助于模拟滤波器成熟的设计技术进行设计。依据模拟滤波器的设计技术和已有的完善设计图表,可以较为方便地对无限长单位脉冲响应(IIR)数字滤波器进行设计。

首先给出滤波器的定义、分类(IIR滤波器的分类)、滤波器性能指标等。详细介绍归一化模拟低通原型滤波器的设计方法和步骤(这是最基本的,也是最重要的)。对于设计出的模拟滤波器的系统函数,主要有两种离散化方法——冲激响应不变法和双线性变换法,将其离散成数字滤波器的系统函数,然后通过计算机软件编程或DSP硬件实现,也可以两者相互结合实现(近年来FPGA和MATLAB结合设计、实现滤波器是一种趋势)。

在介绍归一化模拟低通原型滤波器设计方法的基础上,讲述频率变换法设计IIR数字滤波器,有两种频率变换设计方法:其中一种是频率变换在模拟域中进行,另一种是频率变换在数字域中进行,这些都以归一化模拟低通原型滤波器的设计方法为重要基础,在此基础上进行设计的拓展和延伸。

5.2 滤波器性能指标与设计步骤

5.2.1 滤波器概述

滤波是信号处理的最基本和普遍采用的技术。通过滤波可以从各种频谱叠加在一起的复杂信号中提取需要的信号,剔除或抑制不需要的信号(本书处理的信号,尽管信号可能各种各样,但信号频谱分布是分开的,否则就要用现代信号处理手段处理)。

滤波技术广泛用于现代电子信息、通信和自动控制等诸多领域,因此掌握数字信号处理技术至关重要。

滤波器是具有传输能力的频率选择装置,对要提取的那些频率信号成分表现出较小的衰减,相反,对于不需要的那些频率的信号成分呈现出尽可能大的衰减。

例如,一个线性移不变(LSI)系统,时域和频域的输入/输出关系分别由式(5-1)和式(5-2)给出。

$$y(n) = x(n) * h(n) \quad (5-1)$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega}) \quad (5-2)$$

式中, $Y(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[y(n)]$, $X(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[x(n)]$ 。

为了较直观地说明滤波的作用,使问题简单化,假定 $|X(e^{j\omega})|$ 、 $|H(e^{j\omega})|$ 如图 5-1 (a)、图 5-1 (b) 所示, $|X(e^{j\omega})|$ 、 $|H(e^{j\omega})|$ 分别是滤波器的输入信号的幅度特性和滤波器的幅度特性(后者幅度特性是理想化的),则滤波器的输出信号的幅度特性为 $|Y(e^{j\omega})|$,如图 5-1 (c) 所示。

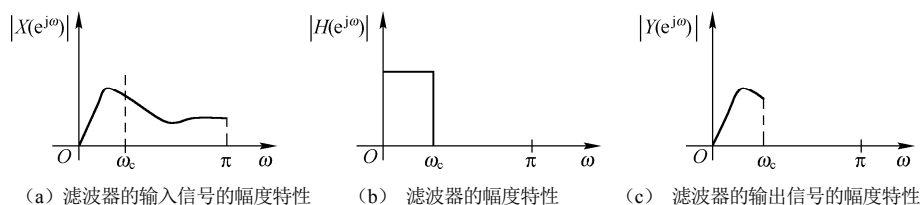


图 5-1 滤波原理示意图

由图 5-1 可以看出,输入信号输入到单位脉冲响应为 $h(n)$ 系统后,系统的响应 $y(n)$ 中只保留了 $|\omega| < \omega_c$ 的频率成分, $|\omega| > \omega_c$ 的成分不存在了,被处理掉了,可见选取不同的滤波器的幅度特性 $|H(e^{j\omega})|$,就可以得到相应的结果(如图 5-1 (c) 所示),这就是滤波器的作用,保留需要的信号频率成分,去掉或抑制不需要的频率成分。

综上所述,滤波器是对输入信号频率成分进行选择的器件、装置或系统。在保证某些频率分量通过滤波器的同时,抑制另一些频率分量。这是滤波器的一般性定义,这里没有区分模拟滤波器和数字滤波器。

数字滤波器是指输入/输出均为数字信号,通过一定运算关系调整输入信号所含频率成分的相对比例,同时抑制或滤除某些频率成分的器件、装置和系统。

与数字滤波器对应的是模拟滤波器,其输入/输出信号均是模拟信号,实现滤波的功能依靠电阻、电容、电感和运算放大器等器件所构成的选频网络来完成,滤波的精度、灵活性、性能稳定性及阻抗匹配等诸方面都逊色于数字滤波器。

数字滤波器的实现有软件和硬件之分,其编程实现的数字滤波器具有诸多模拟滤波器不可比拟的优势,诸如在精度方面具有非常宽的范围选择,在滤波功能的实现上只要改变软件编程,就可以改变滤波功能(模拟滤波器要改变电路结构)等。需要强调的是,FIR 数字滤波器可以实现严格的线性相位滤波器,这是模拟滤波器几乎不可能实现的(模拟滤波器只能用复杂的幅度和相位均衡补偿逼近这个特性,其代价较高)。应该指出 MATLAB 仿真和 FPGA 的结合设计与实现数字滤波器,是近年来比较活跃的领域。

滤波器的分类目前还没有统一的划分方法。按照滤波器处理对象的不同,滤波器可以划分为经典滤波器和现代滤波器。

经典滤波器处理的对象是:假定滤波器的输入信号,其各种频率成分具有不同的频带(各种频率成分是分开的),当信号通过滤波器时,保留有用信号,去掉信号中不需要的频率成分。假如信号和噪声都叠加(互相混叠)在一个频带内,经典滤波器不可能把混叠在一个频带内的噪声剔除。

现代滤波器是在混杂噪声的信号中提取有用信号,估计出信号的某些特征或信号自身,把信号和噪声一律视为随机信号,根据它们的统计特性(如自相关、功率谱等)构造滤波器的系统函数。例如,维纳滤波、卡尔曼滤波和自适应等都属于现代滤波方法。

按照滤波器处理的信号类型不同,滤波器可以分为模拟滤波器(AF, Analog Filter)和数字滤波器(DF, Digital Filter)。

模拟滤波器的输入和输出都是连续时间信号, $h(t)$ 是滤波器的冲激响应,也是连续时间函数。

数字滤波器的输入/输出均是离散信号,它的单位脉冲响应 $h(n)$ 显然是离散的。根据数字滤波器的单位脉冲响应 $h(n)$ 的形式,数字滤波器可以分成无限长单位脉冲滤波器(IIR)和有限长单位脉冲响应滤波器(FIR)两种,其传递函数(系统函数)分别为如下形式。

无限长单位脉冲滤波器(IIR)的传递函数(系统函数)

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}, \quad (\text{其中 } a_k \text{ 不全为零}) \quad (5-3)$$

有限长单位脉冲响应滤波器(FIR)的传递函数(系统函数)

$$H(z) = \sum_{n=1}^{N-1} h(n) z^n \quad (5-4)$$

根据滤波器频率选择特性的不同,可以具体分为低通、高通、带通、带阻和全通等类型(模拟滤波器和数字滤波器均可),如图5-2和图5-3所示。

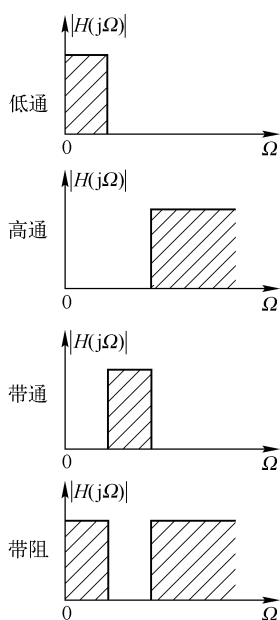


图 5-2 模拟滤波器的类型

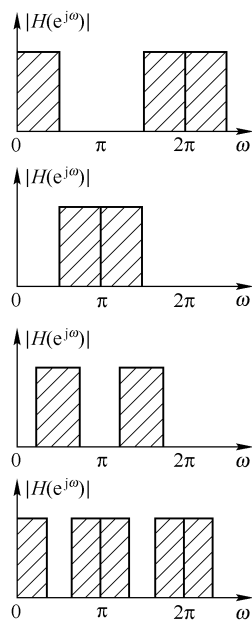


图 5-3 数字滤波器的类型

1. 模拟滤波器的类型及其特点

(1) 图5-2的纵向依次表示模拟低通、高通、带通、带阻滤波器。

(2) 这里的滤波器的幅度特性(或衰减特性)均是理想化的,即通带和阻带之间没有过渡带。

(3) 凡是幅度特性为理想化的滤波器,都是不可实现的,只能用实际的滤波器的特性逼近该特性。以理想低通滤波器为例,理想低通的冲激响应 $h(t)$ 是非因果的,即冲激信号没有作用,理想低通的冲激响应 $h(t)$ 已经产生,这样的系统是非因果的,不可实现的。其实不仅理想低通,凡是通、阻带呈现垂直陡峭特性都不可实现。只能通过某种方法逼近该特性。另外,幅度特性和相位特性是相互制约的(对最小相位系统而言),幅度特性陡峭,相位特性就变坏,相位特性好,过渡带不能太窄,实际设计时往往对幅度特性提出要求,对相位特性一般不提要求,但是当要求高保真传输波形或图像时,则对幅度和相位均须有严格要求。

(4) 频率 Ω 是连续变量, 从 $0 \rightarrow \infty$ 连续变化。

2. 数字滤波器的类型及其特点

(1) 图 5-3 的纵向依次表示数字低通、高通、带通、带阻滤波器。

(2) 幅度特性 (或衰减特性) 均是理想化的, 即通带和阻带之间没有过渡带。

(3) 凡是幅度特性为理想化的滤波器, 都是不可实现的 (通常如此), 理想滤波器对应的时域响应是非因果的, 因而实际的滤波器频率特性是用一个具有因果性冲激响应系统函数对理想滤波器频率特性的逼近。因此, 实际设计时, 只能用实际的滤波器的指标, 采用某种典型的方法逼近该特性。

(4) 数字频率 ω 变化从 0 到 π , 包括所有频率, 这正是与连续频率 Ω 的重要区别的地方。数字滤波器所有的频率特性位于数字角频率轴上的 $0 \rightarrow 2\pi$ 区间。其低频频率成分位于 π 的偶数倍附近, 而高频成分位于 π 的奇数倍附近。正是由于时域抽样过程造成频率特性周期延拓, 数字滤波器的幅度特性在图中呈现周期延拓特性, 这也是与模拟滤波器幅度特性的重要区别。

根据设计方法, 还可以有 Butterworth (巴特沃斯) 滤波器、Chebyshev (切比雪夫) I 型、Chebyshev II 型和 Cauer (椭圆函数) 滤波器等。

5.2.2 数字滤波器的性能指标

设数字滤波器的单位脉冲响应为 $h(n)$, 则该滤波器的频率响应为 $H(e^{j\omega})$ (DTFT $[h(n)]$), 即

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} = H(z)|_{z=e^{j\omega}} = |H(e^{j\omega})|e^{j\theta(\omega)} \quad (5-5)$$

滤波器的特性主要由频率响应表述, 将其改写成两部分, 具体为

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\theta(\omega)} \quad (5-6)$$

式中, $|H(e^{j\omega})|$ 称为滤波器的幅度响应, $\theta(\omega)$ 称为滤波器的相位响应, 它们分别从幅频和相频角度反映对信号的处理功能, 当信号通过滤波器时, 幅度响应表现出对信号中各种频率成分衰减不同, 即对频率成分的选择特性。滤波器相位响应反映信号中各种频率成分通过滤波器后时间上的延时情况 (时间的先后), 由于不同频率成分造成的这种延时用滤波器的群延时描述。滤波器的群延时响应定义为

$$\alpha = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} \quad (5-7)$$

是相位函数 $\theta(\omega)$ 对角频率的导数的负值。当群延时为常数时, 相位响应函数具有线性相位。当滤波器传输波形或图像时, 要求不失真传输, 则滤波器必须具有线性相位特性, 同时对幅度特性有严格要求。概括起来, 必须同时具备如下两个条件:

- ① 在通带内滤波器幅度特性为常数;
- ② 在通带内相位函数为 ω 的线性函数。

线性相位函数 $\theta(\omega)$ 有两种情况: 一种是通过坐标原点的线性函数, 另一种是在纵坐标上有截相 ($\pi/2$) 的线性相位函数 (相角与频率的线性关系画成直线表示, 且直线斜率为负)。

通常, 滤波器的技术指标要求由幅度响应给出, 相位响应一般不要求, 如果要求滤波器保持波形不失真或图像不失真, 则对幅度响应特性指标和相位响应特性指标均有严格要求, 如数字语音合成、波形信号传输、数字图像处理等。本章主要讨论给定幅度特性滤波器的指标, 进行选频滤波器的设计。有关线性相位特性的数字滤波器的设计将在第 6 章讨论。

下面以低通滤波器为例, 讨论数字滤波器的性能指标。由图 5-4 可以看出, 滤波器的频率响应可划分为三个频带: 通带、过渡带和阻带。

- ① ω_p 为通带截止频率, $|\omega| \leq \omega_p$ 为通带频率范围, α_1 为通带容限, 通带容限范围为 $1 - \alpha_1 \leq$

$|H(e^{j\omega})| \leq 1$ 。

② ω_s 为阻带截止频率, $\omega_s \leq |\omega| \leq \pi$ 为阻带频率范围, α_2 为阻带容限, 阻带容限范围为 $|H(e^{j\omega})| \leq \alpha_2$ 。

③ $\omega_p \leq |\omega| \leq \omega_s$ 过渡带, 可实现的滤波器必须有适当的过渡带, 过渡带陡峭, 幅度滤波好, 但相位特性就差, 两者是矛盾的(对最小相位系统而言), 有时需要折中考虑。

通带和阻带内的衰减用分贝(dB)数表示, 通带内允许的最大衰减表示为 δ_p , 阻带最小衰减表示为 δ_s , 它们分别定义为

$$\delta_p = 20 \lg \frac{|H(e^{j0})|}{|H(e^{j\omega_p})|} = -20 \lg |H(e^{j\omega_p})| = -20 \lg(1 - \alpha_1) \quad (5-8)$$

式中, δ_p 为通带最大衰减指标, 衰减越小越好, 越小对有用信号衰减越小, ω_p 为通带截止频率。

$$\delta_s = 20 \lg \frac{|H(e^{j0})|}{|H(e^{j\omega_s})|} = -20 \lg |H(e^{j\omega_s})| = -20 \lg \alpha_2 \quad (5-9)$$

式中, δ_s 为阻带最小衰减指标, 衰减越大越好, 越大反映滤波器对要抑制的频率成分滤除得越干净, ω_s 为阻带截止频率。

通常 $|H(e^{j0})| = 1$, 当 $\delta = |H(e^{j\omega})| = \sqrt{2}/2$ 时, $\delta_p = 3\text{dB}$, 对应的频率 $\omega_p(\omega_c)$ 为 3dB 截止频率, 需要强调的是 ω_p 是否为 3dB 截止频率, 具体要看 δ_p 衰减是否为 3dB。

要点一: 三个边界频率: ω_p 、 ω_c 和 ω_s ; 两个衰减: δ_p 和 δ_s , 设计中经常使用, 非常重要。

IIR 滤波器的设计任务是构造一因果、稳定的离散线性移不变(LSI)系统, 使该系统具有所期望的频率选择特性, 能逼近给定的性能要求。强调构造一个因果系统, 是指系统具有可实现性。强调稳定性针对系统的可用性和可靠性等。强调频率选择性, 是考虑滤波器所达到的技术指标。本书限定的系统是线性的(满足叠加性)、移不变的。非线性和时变系统不属于本书处理的内容。

因果、稳定的线性移不变滤波器的传递函数(IIR 数字滤波器的系统函数)为

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad (\text{其中系数 } a_k \text{ 不全为零}) \quad (5-10)$$

对于 IIR 滤波器设计, 主要的方法是首先设计一个模拟滤波器系统函数 $H(s)$, 然后通过离散化的方法转换成数字滤波器的系统函数 $H(z)$ 。由式(5-10)可见, 设计一个 IIR 数字滤波器, 实质上是寻找一组系数 $\{a_k, b_k\}$ 合适的值, 使数字滤波器的性能指标满足给定的指标要求, 本质上是属于数学逼近问题。这与模拟滤波器的设计思想是完全一致的, 所不同的是模拟滤波器设计是在 s 平面上的逼近问题, 去构造满足所需性能指标的系统函数 $H(s)$, 而数字滤波器的设计则是在 z 平面上通过逼近方法寻找满足性能指标要求的系统函数 $H(z)$ 。

IIR 滤波器设计过程主要包括以下几个步骤。

(1) 按设计任务, 确定数字滤波器性能指标要求, 通常为两个边界频率: ω_p 和 ω_s ; 两个衰减: δ_p 和 δ_s (模拟低通一定是两个边界频率和两个衰减, 滤波器的类型不同, 指标也有不同, 但是最终都要转换为低通指标设计)。

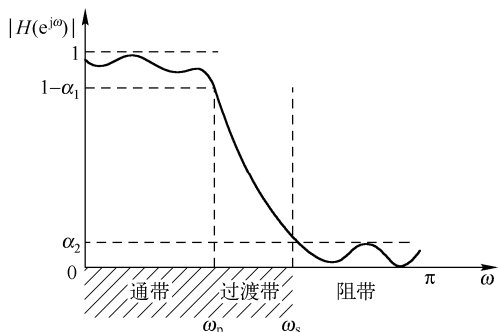


图 5-4 低通滤波器幅频特性

(2) 将数字滤波器指标转换成模拟滤波器指标。

(3) 设计一个满足设计指标要求的模拟低通滤波器系统函数 $H(s)$, 去逼近此性能指标。

(4) 将设计的模拟低通滤波器系统函数 $H(s)$ 离散化成数字滤波器的系统函数 $H(z)$ 。

(5) 确定工程实现方法, 根据性能指标要求和所具备的具体条件, 决定是用软件编程实现 (考虑运算精度、网络结构、字长等), 还是采用专用硬件实现或采用两者结合方法 (近些年 MATLAB 和 FPGA 的结合较为活跃)。

本章重点讨论数字滤波器设计的前 4 个步骤。在 IIR 滤波器设计时, 常用的逼近技术是以成熟的模拟滤波器设计方法、完善的曲线和图表为基础, 在设计出系统函数 $H(s)$ 后, 通过某种离散化的方法转换成数字滤波器的系统函数 $H(z)$ 。

5.2.3 常用模拟滤波器设计方法

模拟滤波器的理论已经相当成熟, 出现了许多高效的设计方法, 滤波器设计有严格的设计公式, 还有完善的曲线和图表供设计者使用, 这些都以归一化低通原型为基础, 常见的模拟滤波器模型包括巴特沃斯 (Butterworth) 滤波器、切比雪夫 (Chebyshev) 滤波器、椭圆函数 (Ellipse 或 Cauer) 滤波器、贝赛尔 (Bessel) 滤波器等。

这些滤波器的衰减特性各有特点。巴特沃斯滤波器具有最平幅度, 且幅度随频率单调下降; 切比雪夫滤波器有 I 型和 II 型, 前者幅度特性在通带内呈现波动, 后者在阻带内呈现波动; 椭圆函数滤波器是上述滤波器中幅度滤波最好的, 其幅度特性在通、阻带均波动; 贝赛尔滤波器的幅度滤波效果差, 但是在通带内, 相对而言有较好的相位特性。概括而言, 对于最小相位系统, 幅度特性好, 则相位特性就差。因此有时需要对两者折中考虑。

考虑读者学习的系统性, 这里将介绍巴特沃斯 (Butterworth) 模拟低通滤波器的设计方法。虽然它是模拟滤波器的设计范畴, 但却是 IIR 数字滤波器设计的重要基础。

现将模拟滤波器幅度响应用幅度平方函数 $|H_a(j\Omega)|^2$ 表示, 由幅度平方函数确定系统函数

$$|H_a(j\Omega)|^2 = H_a(j\Omega)H_a^*(j\Omega) \quad (5-11)$$

可见是频率响应函数与频率响应函数取共轭之积。由于滤波器冲激响应 $h_a(t)$ 是实函数, 因而有 $H_a^*(j\Omega) = H_a(-j\Omega)$ (取共轭), 所以

$$|H_a(j\Omega)|^2 = H_a(j\Omega)H_a(-j\Omega) = H_a(s)H_a(-s)|_{s=j\Omega}$$

式中, $H_a(s)$ 为模拟滤波器的系统函数, 它是两个关于 s 的多项式之比的形式 (关于 s 的有理函数)。

$H_a(j\Omega) = H_a(s)|_{s=j\Omega}$ 是模拟滤波器的频率响应, 将其改写成如下形式

$$H_a(j\Omega) = |H_a(j\Omega)|e^{j\arg[H_a(j\Omega)]} \quad (5-12)$$

$|H_a(j\Omega)|$: 幅度响应 (幅频特性);

$\arg[H_a(j\Omega)]$: 相位响应 (相频特性)。

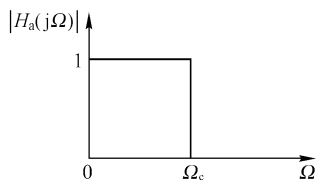


图 5-5 理想模拟低通滤波器的幅频特性

模拟滤波器设计是根据一组设计指标来设计模拟滤波器的系统函数 $H_a(s)$, 使其逼近某个理想幅度特性。例如, 逼近理想模拟低通滤波器的幅频特性, 具体如图 5-5 所示。这是根据幅度平方函数来逼近的。

巴特沃斯低通滤波器有一个突出的特点, 幅度特性在零频率附近呈现最大平坦特性, 因此巴特沃斯逼近通常叫最平幅度逼近。巴特沃斯低通滤波器幅度平方函数定义为

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}} \quad (5-13)$$

巴特沃斯低通滤波器的特点如下。

(1) 当 $\Omega = 0$ 时, $|H_a(j0)|^2 = 1$, 在 $\Omega = 0$ 处无衰减。

(2) 当 $\Omega = \Omega_c$ 时, $|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow |H_a(j\Omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 。

式中, N 为滤波器的阶数, Ω_c 为巴特沃斯低通滤波器 3dB 带宽, 由 Ω_c (3dB 频率) 可以导出通带最大衰减 δ_p (δ_p 小对通带有利)。

$$\begin{aligned} \delta_p &= 20 \lg \frac{|H_a(j0)|}{|H_a(j\Omega_c)|} = -20 \lg |H_a(j\Omega_c)| \\ &= -20 \lg \frac{1}{\sqrt{2}} = (-10) \times (-0.3010) \\ &= 3.010 \text{ dB} \approx 3 \text{ dB} \end{aligned} \quad (5-14)$$

由图 5-6 可见所有 N 值对应的幅频特性曲线都通过 3dB 衰减点 (特性)。

(3) 当 $\Omega < \Omega_c$ 时, $|H_a(j\Omega)|^2$ 有最大平坦的幅度特性, 即通带内在 $\Omega = 0$ 处, $|H_a(j\Omega)|^2$ 前 $(2N-1)$ 阶导数为零, 因此巴特沃斯滤波器叫最平幅度滤波器, 其最大平坦在 $\Omega = 0$ 处附近。随 Ω 从 $0 \rightarrow \Omega_c$ 变高, $|H_a(j\Omega)|^2$ 单调减少, N 越大, 通带内幅度特性平坦度越好, 衰减越慢。

(4) 当 $\Omega > \Omega_c$ 时, 即在过渡带和阻带范围, $|H_a(j\Omega)|^2$ 也呈现单调减少特性, 但是其衰减的速率, 远高于通带内的衰减速率, 而且 N 越大, 衰减速率越快。

当 $\Omega = \Omega_s$ 时, 在阻带截止频率处衰减为

$$\delta_s = 20 \log_{10} \frac{|H_a(j0)|}{|H_a(j\Omega_s)|} = -20 \log_{10} |H_a(j\Omega_s)| \quad (5-15)$$

式中, δ_s 为阻带最小衰减。 δ_s 衰减越大, 滤波特性越好, 即要滤除的频率成分更多。

巴特沃斯滤波器的幅频特性完全由滤波器的阶次 (N) 决定。巴特沃斯滤波器的幅频特性随 N 取值不同的变化关系, 如图 5-6 所示。 N 是滤波器的阶数, 实质上是系统极点的个数, 系统的极点决定系统的主要性能, 滤波器也是系统, 因此极点决定了滤波器的主要性能。下面推导求巴特沃斯低通滤波器极点的公式。

重写巴特沃斯低通滤波器幅度平方函数, 推导巴特沃斯低通滤波器极点公式

$$|H_a(j\Omega)|^2 = H_a(j\Omega)H_a(-j\Omega) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

将 $\Omega = \frac{s}{j}$ 代入上式, 则有

$$|H_a(j\Omega)|^2_{\Omega=\frac{s}{j}} = H_a(s)H_a(-s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j\Omega_c}\right)^{2N}} \quad (5-16)$$

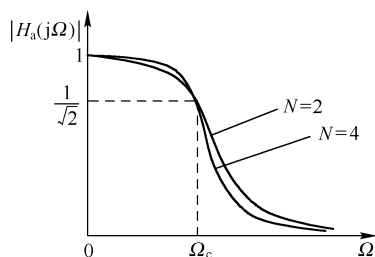


图 5-6 巴特沃斯低通的幅度特性与 N 的关系

$H_a(s)H_a(-s)$ 的极点为

$$s_k = (-1)^{\frac{1}{2N}} (j\Omega_c) = \Omega_c e^{j\left[\frac{1}{2} + \frac{2k-1}{2N}\right]\pi} \quad k=1,2,3,\dots,2N \quad (5-17)$$

式中, $j = e^{j\frac{1}{2}\pi}$, $(-1) = e^{j(2k-1)\pi}$ 。

$H_a(s)H_a(-s)$ 的极点分布如图 5-7 所示。

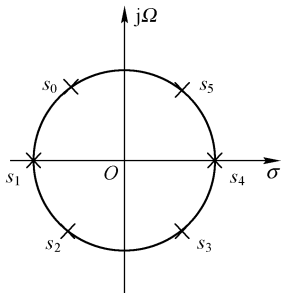


图 5-7 三阶巴特沃斯滤波器的极点分布

① $H_a(s)H_a(-s)$ 的极点为: 以虚轴为对称轴, 且不会分布在虚轴上。

② N 为奇数时, 实轴上有两个极点, N 为偶数时, 实轴上没有极点。

③ 极点间隔为 π/N 。

取左半 s 平面极点, 即为 $H_a(s)$ 的极点, 这是由于滤波器必须是稳定的, 因此系统函数的极点必须在 s 平面的左平面。

因而巴特沃斯低通滤波器的系统函数为

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^N}{\prod_{k=1}^N (s - s_k)}, \quad s_k = \Omega_c e^{j\left[\frac{1}{2} + \frac{2k+1}{2N}\right]\pi} \quad (k=1,2,\dots,N) \quad (5-18)$$

① 取 $H_a(s)H_a(-s)$ 的极点数的一半, 并且位于 s 平面的左平面, 给 $H_a(s)$ 。

② 令 $H_a(0)=1$, 可以求出 $\Omega_c^N = \prod_{k=1}^N (-s_k)$ 。

③ 当 $\Omega_c = 1\text{rad/s}$ 时, 称为归一化频率, 通常在设计中频率都采用归一化形式 ($\Omega_c = 1\text{rad/s}$)。归一化处理后的巴特沃斯低通滤波器的系统函数的极点分布位置与系统函数分母多项式系数的大小对应, 有现成的表格可查 (见附录 A), 设计者可根据给定的两个边界频率指标和两个衰减指标, 计算出低通滤波器的阶数 N , 根据阶数就可以查表得出归一化的巴特沃斯低通原型滤波器的系统函数。即查得的归一化系统函数

$$H_a(\bar{s}) = \frac{K_0}{a_0 + a_1\bar{s} + a_2\bar{s}^2 + \dots + a_N\bar{s}^N} \quad \text{或} \quad H_a(\bar{s}) = \frac{K_0}{(\bar{s} - s_1)(\bar{s} - s_2)\dots(\bar{s} - s_N)} \quad (5-19)$$

实际上有三种形式, 一般多用这两种。

在滤波器设计过程中, 根据指标可计算出低通滤波器的阶数, 根据阶数查找归一化图表, 得出归一化滤波器系统函数, 对于实际设计的滤波器, 必须将归一化滤波器的系统函数非归一化, 因此涉及实际频率与归一化频率之间的转换 (换算), 假如实际滤波器系统函数中, 参考频率 Ω_p 取 3dB 截止频率, 也可以取衰减不为 3dB 处的频率, 用 $H_a(\bar{s})$ 表示归一化的系统函数, $H_a(s)$ 表示非归一化的系统函数, 那么将 $H_a(\bar{s})$ 中变量 \bar{s} 用 $\frac{s}{\Omega_p}$ 代替, 得到实际滤波器的系统函数, 即 $H_a(s) = H_a(\bar{s})|_{\bar{s}=\frac{s}{\Omega_p}} = H_a\left(\frac{s}{\Omega_p}\right)$ 。

【例 5-1】 试用查表法写出三阶巴特沃斯低通滤波器的系统函数, 设 $\Omega_c = 4\text{rad/s}$ 。

解: 三阶巴特沃斯归一化原型滤波器系统函数, 可查 $N=3$ 的归一化原型巴特沃斯低通滤波器的表格, 结果为

$$H_a(\bar{s}) = \frac{K_0}{a_0 + a_1\bar{s} + a_2\bar{s}^2 + a_3\bar{s}^3}$$

由附录 A 可查出: $a_1=2$, $a_2=2$, $a_0=1$, $a_3=1$, 所以 $H_a(\bar{s}) = \frac{K_0}{1 + 2\bar{s} + 2\bar{s}^2 + \bar{s}^3}$ 。

若令 $H_a(0)=1$, 则有 $K_0=1$ 。

将频率 $\Omega_c = 4\text{rad/s}$ 代入, 进行非归一化(去掉归一化), 则得实际滤波器的系统函数为

$$H_a(s) = H_a(\bar{s})\Big|_{\bar{s}=\frac{s}{\Omega_c}} = H_a\left(\frac{s}{\Omega_c}\right) = \frac{64}{64 + 32s + 8s^2 + s^3}$$

从该题的求解过程中, 可以总结出由 N 求实际低通滤波器的系统函数的步骤如下。

① 由给定指标(两个边界频率和两个衰减等), 计算出滤波器的阶数。

② 根据 N 查找归一化表格(有三种形式, 根据需要选一种, 附录 A 提供两种), 得到归一化原型低通滤波器的系统函数。

③ 根据选定的归一化频率, 进行非归一化, 求出实际的低通滤波器的系统函数。

上面已经介绍了由 N 求实际的低通滤波器的系统函数的步骤。还有两个问题需要解决, 这就是如何利用实际滤波器给定的性能指标, 推导求巴特沃斯低通滤波器的阶数 N 和求归一化截止频率 Ω_c 的公式。

假定要设计的模拟低通滤波器的性能指标如图 5-8 所示, 图中所示的幅频响应分三个频带, 通带、过渡带和阻带(通常低通滤波器设计给出性能指标为两个边界频率、两个衰减, 它们分别是通带截止频率 Ω_p 、阻带截止频率 Ω_s 、通带允许的最大衰减 δ_p 和阻带允许的最小衰减 δ_s)。

δ_p 和 δ_s 分别定义如下

$$\delta_p = 20 \lg \frac{|H_a(j0)|}{|H_a(j\Omega_p)|} = -20 \lg |H_a(j\Omega_p)| \quad (5-20)$$

$$\delta_s = 20 \lg \frac{|H_a(j0)|}{|H_a(j\Omega_s)|} = -20 \lg |H_a(j\Omega_s)| \quad (5-21)$$

将 $|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$ 代入式(5-20)和式(5-21)中, 则分别有

$$\delta_p = -20 \lg \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N}}} = 10 \lg \left[1 + \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N} \right] \Rightarrow 0.1\delta_p = \lg \left(1 + \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N} \right)$$

$$\delta_s = -20 \lg \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N}}} = 10 \lg \left[1 + \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N} \right] \Rightarrow 0.1\delta_s = \lg \left(1 + \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N} \right)$$

可得

$$(10^{0.1\delta_p} - 1) = \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N} \Rightarrow 2N \lg \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right) = \lg(10^{0.1\delta_p} - 1) \quad (5-22)$$

$$(10^{0.1\delta_s} - 1) = \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N} \Rightarrow 2N \lg \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right) = \lg(10^{0.1\delta_s} - 1) \quad (5-23)$$

式(5-22)减去式(5-23)得

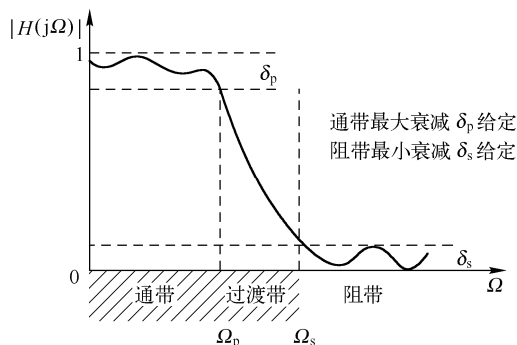


图 5-8 模拟低通滤波器的性能指标

$$2N \left[\lg \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c} \right) - \lg \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c} \right) \right] = \lg(10^{0.1\delta_p} - 1) - \lg(10^{0.1\delta_s} - 1)$$

$$N \geq \lg \left[\frac{(10^{0.1\delta_p} - 1)}{(10^{0.1\delta_s} - 1)} \right] / 2 \lg \left[\frac{\Omega_p}{\Omega_s} \right] \quad \text{或} \quad N \geq \lg \left[\frac{(10^{0.1\delta_s} - 1)}{(10^{0.1\delta_p} - 1)} \right] / 2 \lg \left[\frac{\omega_s}{\omega_p} \right]$$

式中, N 为巴特沃斯归一化模拟低通滤波器的阶数, 其取值为最接近计算值的整数, 且大于等于计算值。如计算值为 5.16 或 5.86 等, 则取 $N=6$, 这样可以保证满足或超过设计指标要求。求 Ω_c 的公式 (请读者自己完成) 分别为

$$\Omega_c = \Omega_s [10^{0.1\delta_s} - 1]^{-\frac{1}{2N}}, \quad \text{通带指标有富裕 (阻带满足要求)}$$

$$\Omega_c = \Omega_p [10^{0.1\delta_p} - 1]^{-\frac{1}{2N}}, \quad \text{阻带指标有富裕 (通带满足要求)} \quad (5-24)$$

要点二: 计算滤波器阶数 $N \geq \lg \left[\frac{10^{0.1\delta_p} - 1}{10^{0.1\delta_s} - 1} \right] / 2 \lg \left[\frac{\Omega_p}{\Omega_s} \right]$ 。

要点三: 计算滤波器阶数 $N \geq \lg \left[\frac{10^{0.1\delta_s} - 1}{10^{0.1\delta_p} - 1} \right] / 2 \lg \left[\frac{\Omega_s}{\Omega_p} \right]$ 。

要点四: 阻带最小衰减 $\delta_s = 10 \lg \left[1 + \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c} \right)^{2N} \right]$ 。

要点五: 通带最大衰减 $\delta_p = 10 \lg \left[1 + \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c} \right)^{2N} \right]$ 。

要点六: 通带指标有富裕 $\Omega_c = \Omega_s [10^{0.1\delta_s} - 1]^{-\frac{1}{2N}}$ 。

要点七: 阻带指标有富裕 $\Omega_c = \Omega_p [10^{0.1\delta_p} - 1]^{-\frac{1}{2N}}$ 。

上面已经导出了由两个边界频率和两个衰减计算滤波器阶数的公式, 并给出归一化参考频率的计算公式, 由 N 查归一化表格得出归一化巴特沃斯模拟低通滤波器的系统函数及进行非归一化处理, 求出实际滤波器的系统函数。

下面举例介绍由给定指标计算 N 和根据 N 查归一化表格, 以及最后求出实际滤波器的系统函数的全过程 (根据实际滤波器性能指标设计巴特沃斯模拟低通滤波器)。

【例 5-2】 设要求在通带频率低于 1kHz 时, 允许幅度误差在 1dB 以内, 在频率大于 1.8kHz 的阻带内, 衰减大于 14dB。试设计一个巴特沃斯模拟低通滤波器。

解: ① 模拟低通滤波器的两个边界频率、两个衰减指标分别为

$$\Omega_p = 2\pi f_p = 2000\pi \text{ rad/s}, \quad \text{通带最大衰减 } \delta_p = 1\text{dB}$$

$$\Omega_s = 2\pi f_s = 3600\pi \text{ rad/s}, \quad \text{阻带最小衰减 } \delta_s = 14\text{dB}$$

② 计算巴特沃斯低通滤波器阶数为

$$N \geq \lg \left[\frac{10^{0.1\delta_s} - 1}{10^{0.1\delta_p} - 1} \right] / 2 \lg \left[\frac{\Omega_s}{\Omega_p} \right] = \frac{1.9692}{0.5105} = 3.8570$$

③ 取 $N=4$, 根据 N 值查附录 A 得到归一化模拟低通滤波器的系统函数为

$$H_a(\bar{s}) = \frac{1}{1 + 2.6131\bar{s} + 3.4142\bar{s}^2 + 2.6131\bar{s}^3 + \bar{s}^4}$$

④ 非归一化, 求出实际滤波器的系统函数。

计算归一化频率的公式 (这里选取保证通带刚好满足指标要求, 阻带指标有富裕) 为

$$\Omega_c = \Omega_p [10^{0.1\delta_p} - 1]^{-\frac{1}{2N}}$$

将通带边界频率和通带最大衰减代入上式有

$$\Omega_c = 7439 \text{ rad/s}$$

得到

$$f_c = 1.1840 \text{ kHz} \quad (\Omega = 2\pi f)$$

归一化巴特沃斯低通滤波器的系统函数为

$$H_{\text{aLP}}(\bar{s}) = \frac{1}{1 + 2.6131\bar{s} + 3.4142\bar{s}^2 + 2.6131\bar{s}^3 + \bar{s}^4}$$

用 $\frac{s}{\Omega_c}$ 替换 $H_{\text{a}}(\bar{s})$ 中的 \bar{s} （非归一化）有

$$\begin{aligned} H_{\text{aLP}}(s) &= H_{\text{aLP}}(\bar{s}) \Big|_{\bar{s}=\frac{s}{\Omega_c}} = \frac{1}{1 + 2.6131\bar{s} + 3.4142\bar{s}^2 + 2.6131\bar{s}^3 + \bar{s}^4} \Big|_{\bar{s}=\frac{s}{\Omega_c}} \\ &= \frac{\Omega_c^4}{\Omega_c^4 + 2.6131s\Omega_c^3 + 3.4142\Omega_c^2s^2 + 2.6131\Omega_c s^3 + s^4} \\ &= \frac{3.0624 \times 10^{15}}{3.0624 \times 10^{15} + 1.0757 \times 10^{12}s + 1.8893 \times 10^8s^2 + 1.9438 \times 10^4s^3 + s^4} \end{aligned}$$

⑤ 仿真程序如下，仿真结果如图 5-9 所示。

```
wp=2000*pi;
ws=3600*pi;
N1=log10((10^1.4-1)/(10^0.1-1))
N2=2*log10((3600*pi)/(2000*pi))
Na=N1/N2
N=ceil(Na)
wc=2000*pi*(10^0.1-1)^(-0.125)
fc=wc/(2*pi)
num=1;
den=[1,2.6131,3.4142,2.6131,1];
[H,W]=freqs(num,den,'s')
subplot(221);plot(W,abs(H));grid;
axis([0,10,0,1])
xlabel('frequency');ylabel('normalized ALPF');
num1=[3.0623*(10^15)];
den1=[1,1.9438*(10^4),1.8893*(10^8),1.0757*(10^12),3.0623*(10^15)];
[H1,W1]=freqs(num1,den1,'s')
subplot(222);plot(W1,abs(H1));grid;
axis([0,10^5,0,1])
xlabel('frequency');ylabel('desired ALPF')
```

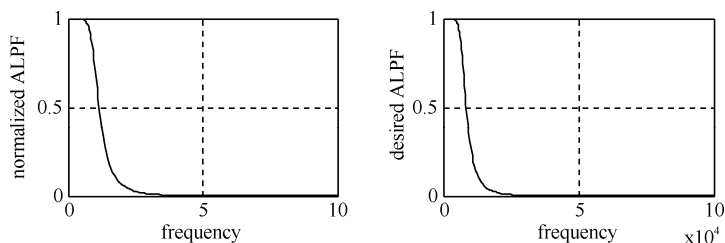


图 5-9 例 5-2 模拟低通滤波器设计仿真结果

5.3 冲激响应不变法

冲激响应不变法是将模拟滤波器的系统函数变换成数字滤波器的系统函数方法之一。两者之间的转换实际上是 s 平面与 z 平面之间的映射关系。基本思想是用数字滤波器模仿模拟滤波器的特性。它是将模拟滤波器冲激响应 $h(t)$ 的等间隔抽样值作为数字滤波器的单位脉冲响应序列 $h(n)$, 即

$$h(n) = h(t)|_{t=nT} \quad (5-25)$$

式中, T 为抽样周期, 对 $h(n)$ 求 Z 变换, 可得到数字滤波器的系统函数 $H(z)$ 。

5.3.1 变换原理

冲激响应不变法是用数字滤波器对应的时域单位脉冲响应 $h(n)$ 模仿模拟滤波器的冲激响应 $h(t)$ 。其过程如下

$$H_a(s) \xrightarrow{\text{拉普拉斯反变换}} h_a(t) \xrightarrow{\text{离散化 } t=nT} h(n) \xrightarrow{Z\text{变换}} H(z)$$

这个过程首先对模拟滤波器的系统函数求拉普拉斯反变换, 得到模仿模拟滤波器的冲激响应 $h_a(t)$, 用 $t=nT$ 离散化 $h_a(t)$, 使 $h(n)$ 的序列值正好等于 $h_a(t)$ 的离散点上的抽样值, 即有如下关系

$$h(n) = h_a(nT)$$

考虑 $h(n)$ 的 Z 变换和抽样信号 $h_a(nT)$ 的拉普拉斯变换之间的变换关系

$$H(z)|_{z=e^{sT}} = \hat{H}_a(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a(s - j\frac{2\pi k}{T}) \quad (5-26)$$

可见, 原连续信号抽样的拉普拉斯变换是原连续信号拉普拉斯变换在 s 平面的周期延拓 (按主值区), 其大小差 T 倍, 当 T 较小时, $H(z)$ 会变得很大, 为防止这种情况出现, 进行如下调整: 令 $h(n) = Th_a(nT)$ 。

可见, 冲激响应不变法是将模拟滤波器的 s 平面变换到数字滤波器的 z 平面。两者之间的转换实际上是 s 平面与 z 平面之间的映射关系。其表达式为: $z = e^{sT}$ 。

下面讨论 s 平面到 z 平面的映射关系, 由图 5-10 可以看出以下几点。

- ① s 平面左半平面纵轴方向, 每条宽度为 $2\pi/T$ 横条都重叠地映射到 z 平面的单位圆内。
- ② s 平面右半平面纵轴方向, 每条宽度为 $2\pi/T$ 横条都重叠地映射到 z 平面的单位圆外。
- ③ s 平面的虚轴上都映射到 z 平面的单位圆上。这部分也是重叠映射, s 平面的虚轴上每段长度为 $2\pi/T$ 的线段, 其映射到 z 平面单位圆上一周, 因此 s 平面整个虚轴映射到 z 平面, 就是每隔 $2\pi/T$, 在单位圆上兜一圈。这些特点正好反映了 $H(z)$ 和 $H_a(s)$ 之间的变换关系, 即

$$z = e^{sT} \quad (5-27)$$

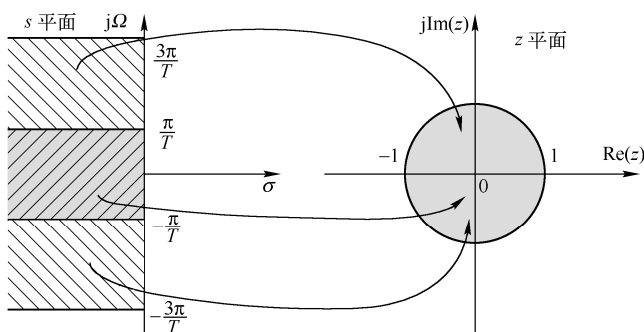


图 5-10 冲激响应不变法映射关系

因此,冲激响应不变法所反映 s 平面与 z 平面之间的映射关系不遵从简单代数映射关系。另外,这种方法在频率高时必然混叠,因为它们之间为重叠映射。离散化时必须注意该问题,但是这种离散化方法不会对稳定性带来问题。

5.3.2 模拟滤波器的数字化方法

从变换原理可以清楚地看到,整个处理过程比较烦琐,实质上就是从拉普拉斯变换到 z 变换的转换过程,即

$$H_a(s) \Rightarrow L^{-1}[H_a(s)] = h_a(t) \Rightarrow h_a(nT) \Rightarrow h(n) \Rightarrow Z[h(n)] = H(z)$$

这个过程实际上就是由模拟滤波器的系统函数 $H_a(s)$, 求数字滤波器的系统函数 $H(z)$ 。模拟滤波器的系统函数是关于 s 的有理函数,如果滤波器的阶数较高,有理函数阶次高,求其对应的 Z 变换就复杂,但是可以将复杂问题简单化,将模拟滤波器的系统函数的部分分式展开成一系列一阶节或二阶节的基本形式,根据对应性直接写出数字滤波器的一阶节或二阶节的对应形式或通过查 Z 变换表解决。本书给出了模拟与数字系统函数标准一阶节或二阶节的对应形式,以供用时参照(也可考虑用 MATLAB 环境解决这类问题)。

为了使讨论问题简单化,假定模拟滤波器的系统函数 $H_a(s)$ 只有单阶极点(共轭和重阶也可仿照处理),且分母的阶次大于或等于分子的阶次(模拟滤波器的可实现性要求),将 $H_a(s)$ 展开部分分式形式,其形式为

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k} \quad (5-28)$$

对应的滤波器的冲激响应 $h_a(t)$ 是 $L^{-1}[H_a(s)]$, $h_a(t)$ 表示为

$$h_a(t) = L^{-1}[H_a(s)] = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k t} u(t) \quad (5-29)$$

式中, $u(t)$ 是连续时间的阶跃函数(限定 $h_a(t)$ 的因果性)。

由 $h(n) = Th_a(nT)$, 冲激响应不变法所求的数字滤波器的单位脉冲响应 $h(n)$ 等于 $h_a(t)$ 的抽样乘以 T (为防止 T 很小时 $H(z)$ 很大而做的调整), 则有

$$h(n) = Th_a(nT) = \sum_{k=1}^N TA_k e^{s_k nT} u(n) = \sum_{k=1}^N TA_k (e^{s_k T})^n u(n) \quad (5-30)$$

对 $h(n)$ 求 Z 变换, 得到数字滤波器的系统函数

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^N TA_k (e^{s_k T} z^{-1})^n = \sum_{k=1}^N TA_k \sum_{n=0}^{\infty} (e^{s_k T} z^{-1})^n \quad (5-31)$$

若 $|e^{s_k T} z^{-1}| < 1$ 或 $|e^{s_k T}| < |z|$, 级数收敛, Z 变换存在, 利用等比级数前 N 项和公式有

$$H(z) = \sum_{k=1}^N TA_k \sum_{n=0}^{\infty} (e^{s_k T} z^{-1})^n = \sum_{k=1}^N TA_k \frac{1}{1 - e^{s_k T} z^{-1}} \quad (5-32)$$

与模拟系统滤波器系统函数部分分式展开形式比较, 则有

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k} \Leftrightarrow H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{TA_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$$

两者的系统函数比较有如下的对应关系。

(1) s 平面单极点 $s = s_k$ 变换到 z 平面上 $z = e^{s_k T}$ 处单阶极点, $s - s_k = 0$ 和 $z - e^{s_k T} = 0$ 为各自系统的特征方程(求极点)。

(2) $H(z)$ 和 $H_a(s)$ 的部分分式展开式差一个系数 T 。

(3) 稳定的模拟滤波器一定映射为稳定的数字滤波器。

s 平面的左半平面上, $s = \sigma + j\Omega$, $\sigma < 1$; 映射到 z 平面 $z - e^{s_k T} = 0$, 在 z 平面的单位圆内, 即 $|e^{s_k T}| = e^{\text{Re}[s_k]T} < 1$ 。总之, s 平面的左半平面上的极点, 通过冲激响应不变法映射到 z 平面的极点在单位圆内。因此如果模拟滤波器是稳定的, 通过冲激响应不变法变换成的数字滤波器也是稳定的。

需要指出的是, 模拟滤波器系统函数通过冲激响应不变法变换成数字滤波器, 它们零点的位置不遵从这种代数对应关系, 它们将受到极点 s_k 和系数 A_k 的变化影响。

设计滤波器时, $h_a(t)$ 都是实数, 因此 $h_a(t)$ 的极点一定是以共轭对形式出现的。对于这种共轭极点, $h_a(t)$ 形成二阶的基本节, 其模拟滤波器的二阶基本节有如下两种形式。

$$(1) \quad \frac{s + \sigma_k}{(s + \sigma_k)^2 + \Omega_k^2}, \text{ 极点 } s_k = -\sigma_k \pm j\Omega_k \quad (5-33)$$

与之相对应的数字滤波器的二阶基本节的形式为

$$\frac{1 - z^{-1}e^{-\sigma_k T} \cos \Omega_k T}{1 - 2z^{-1}e^{-\sigma_k T} \cos \Omega_k T + z^{-2}e^{-2\sigma_k T}} \quad (5-34)$$

$$(2) \quad \frac{\Omega_k}{(s + \sigma_k)^2 + \Omega_k^2}, \text{ 极点 } s_k = -\sigma_k \pm j\Omega_k \quad (5-35)$$

与之相对应的数字滤波器的二阶基本节的形式为

$$\frac{z^{-1}e^{-\sigma_k T} \sin \Omega_k T}{1 - 2z^{-1}e^{-\sigma_k T} \cos \Omega_k T + z^{-2}e^{-2\sigma_k T}} \quad (5-36)$$

在滤波器设计中, 将模拟滤波器的系统函数通过冲激响应不变法离散化成数字滤波器的系统函数, 总可以将模拟滤波器的系统函数展开成部分分式, 它包括一阶基本节和二阶基本节, 这时对整个系统函数求 Z 变换的问题, 可简化成分别对每个一阶节和二阶节求 Z 变换的问题, 使数字滤波器设计工作简化。

【例 5-3】 设模拟滤波器的系统函数为 $H_a(s) = \frac{3}{s^2 + 5s + 4}$, 试利用冲激响应不变法设计 IIR 数字滤波器。设抽样周期为 $T = 1$ 。

解: 模拟滤波器系统函数展开为部分分式 (两个一阶节)

$$H_a(s) = \frac{3}{s^2 + 5s + 4} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+4}$$

所以数字滤波器系统函数与之对应的一阶的形式如下

$$H(z) = \frac{T}{1 - z^{-1}e^{-T}} - \frac{T}{1 - z^{-1}e^{-4T}}$$

将抽样周期 $T = 1$ 代入, 则有

$$H(z) = \frac{0.3496z^{-1}}{1 - 0.3862z^{-1} + 0.0067z^{-2}}$$

模拟滤波器的频率响应和数字滤波器的频率响应分别为

$$H_a(j\Omega) = H_a(s)|_{s=j\Omega} = \frac{3}{-\Omega^2 + 5j\Omega + 4}$$

$$H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}} = \frac{0.3496e^{-j\omega}}{1 - 0.3862e^{-j\omega} + 0.0067e^{-2j\omega}}$$

5.3.3 用冲激响应不变法实现 IIR 数字滤波器

冲激响应不变法实际上是利用冲激响应 ($h_a(t) \rightarrow h_a(nT)$) 时域抽样定理, 保证稳定的模拟滤波

器一定映射为稳定的数字滤波器(由映射关系决定),两者频率之间的变换关系满足如下关系:

$$\omega = \Omega T \quad (\text{用冲激响应不变法离散化时,频率转换公式})$$

可见,数字域频率和模拟域频率具有线性关系。因此,利用冲激响应不变法设计的数字滤波器的性能与模拟滤波器的性能相似。这是该方法的突出优点,即时域特性逼近程度好。

用冲激响应不变法设计数字滤波器(低通和带通)的主要步骤如下。

(1) 确定数字滤波器性能指标。

① 数字低通指标:两个边界频率 ω_p 、 ω_s 和两个衰减 δ_p 、 δ_s 。

② 数字带通指标:通带上、下边界频率,阻带上、下边界频率和两个衰减 δ_p 、 δ_s 。

(2) 将数字滤波器指标转换成模拟滤波器指标。

① 数字低通指标转换成模拟低通指标,用公式 $\omega = \Omega T$, $(\omega_p, \omega_s) \rightarrow (\Omega_p, \Omega_s)$ 和 $(\delta_p, \delta_s) \rightarrow (\delta_p, \delta_s)$ (两个衰减保持不变)。

② 数字带通指标转换成模拟带通指标(用公式 $\omega = \Omega T$)。

③ 模拟带通指标转换成模拟低通指标, $(\Omega_{p1}, \Omega_{p2}) \rightarrow \Omega_p$, $(\Omega_{s1}, \Omega_{s2}) \rightarrow \Omega_s$, 两个衰减保持不变。

(3) 按照模拟滤波器的设计方法,设计归一化模拟低通滤波器。

(4) 求出实际模拟滤波器的系统函数 $H_a(s)$ (非归一化处理)。

(5) 利用冲激响应不变法离散化,将模拟滤波器系统函数转换成数字滤波器系统函数。

① 模拟低通到数字低通直接离散化。

② 数字带通滤波器设计,则要将模拟低通变换为模拟带通,再将其离散化成数字带通滤波器。

5.3.4 冲激响应不变法的优点和缺点

冲激响应不变法的优点如下。

(1) 数字滤波器的单位脉冲响应完全模仿了模拟滤波器的冲激响应,时域特性逼近程度好。

(2) 模拟角频率和数字角频率之间为线性关系 $\omega = \Omega T$,频率之间不存在失真,这就保证了模拟系统幅度响应和相位响应转换成数字系统幅度响应和相位响应时,保持离散化后的不变性,例如,一个线性相位的模拟滤波器可以离散化成一个线性相位的数字滤波器,这是该方法的突出优点。

(3) 转换关系简单,并有现成的一阶和二阶基本节,转换时所需的部分分式展开形式可借助MATLAB环境。

冲激响应不变法的缺点如下。

(1) 高频频谱混叠。冲激响应不变法实际上是时域抽样问题,它们之间约束关系为 $z = e^{sT}$,因此 s 平面和 z 平面之间的映射是多值映射,即 s 平面的左半平面内的每个 $2\pi/T$ 带域都映射到 z 平面的单位圆内(某些高频成分和低频成分都映射到数字域某些频率处,引起各种模拟频率成分在数字域某些点的叠加),因此该方法只能限于模拟滤波器是带宽有限的,否则必然出现频率混叠现象。

(2) 混叠是冲激响应不变法固有的缺点。通过增加时域抽样频率,不会使混叠现象消失,只能使单位脉冲响应更加逼真模仿模拟滤波器的脉冲响应,混叠是照样存在的,混叠是冲激响应不变法固有的缺点。如图5-11所示为冲激响应不变法中的频率混叠现象。

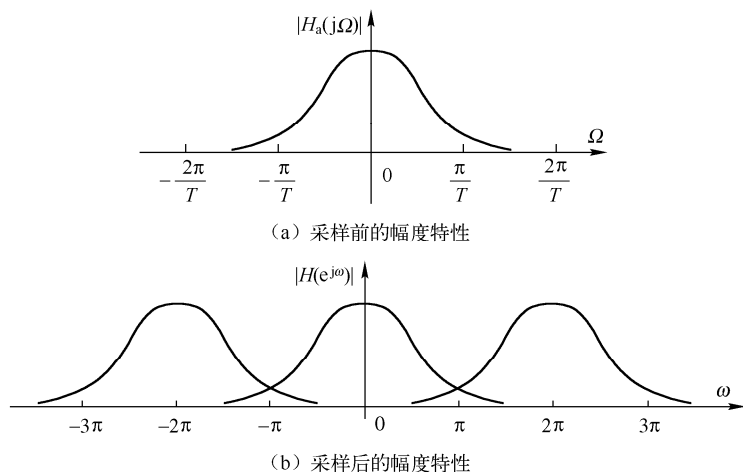


图 5-11 冲激响应不变法中的频率混叠现象

(3) 仅适合于低通、带通滤波器设计。由于两个平面之间的映射关系为多值映射,即多个带域叠加在一点,出现频率混叠,不适合高通和带阻滤波器的设计,仅适合于低通、带通滤波器的设计。对于高通和带阻滤波器,不宜采用冲激响应不变法,通常必须加保护滤波器,滤掉高于折叠频率以上的频率成分,避免混叠失真;对于低通和带通需要充分带限,阻带衰减越大,混叠失真越小。

这种离散化的方法主要用于设计某些要求在时域上能模仿模拟滤波器功能(如控制脉冲响应)的数字滤波器,这样可以在数字滤波器中保留模拟滤波器的许多优点,除此之外,在设计数字滤波器时,一般采用即将介绍的双线性变换法。

要点八: 冲激响应不变法适用于低通和带通滤波器设计的离散化。

【例 5-4】 设模拟 RC 滤波器如图 5-12 所示,试用冲激响应不变法转换成 IIR 数字滤波器,如图 5-13 所示。

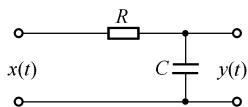


图 5-12 模拟 RC 滤波器

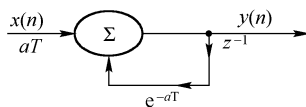


图 5-13 一阶数字系统

解: 模拟低通滤波器的系统函数为

$$H_a(s) = \frac{1}{sc} = \frac{a}{s+a}, \quad a = \frac{1}{sc}$$

模拟低通滤波器的系统函数极点

$$s+a=0 \rightarrow s=-a$$

① 利用冲激响应不变法将模拟低通的系统函数转换成数字滤波器的系统函数。

$$s+a=0 \Leftrightarrow 1-e^{-aT}z^{-1}=0, \quad \text{两者特征方程的对应。}$$

$$s_k=-a \Leftrightarrow z_k=e^{-aT}, \quad \text{极点的对应。}$$

$$\frac{a}{s+a} \Leftrightarrow \frac{Ta}{1-e^{-aT}z^{-1}}, \quad \text{一阶基本节的对应形式。}$$

② 因此利用冲激响应不变法转换成数字滤波器的系统函数为

$$H_1(z) = \frac{Ta}{1 - e^{-aT}z^{-1}}$$

③ $H_1(z)$ 的网络结构如图 5-14 所示。

前面已经指出, 冲激响应不变法的多值映射产生混叠失真 (频率高时), 同时指出提高抽样频率不能改善冲激响应不变法多值映射带来的混叠失真, 只能使单位脉冲响应更加逼真模仿模拟滤波器的冲激响应, 用上面的例题展开说明这两个问题。

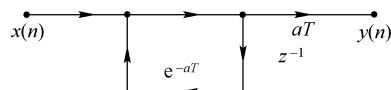


图 5-14 $H_1(z)$ 的网络结构

先讨论改变抽样周期 T 对幅度响应的影响, 再讨论模拟滤波器非带限时, 冲激响应不变法多值映射带来的混叠失真及抽样周期的选取原则。

令 $a=1000$, 分别令 $T=0.001\text{s}$ 、 $T=0.0002\text{s}$, 计算两种抽样周期对应的幅度响应, 两种幅度响应的表达式分别为

$$|H_a(j\Omega)| = \sqrt{\frac{a^2}{\Omega^2 + a^2}} \quad 0 \leq \Omega = \omega/T \leq \pi/T$$

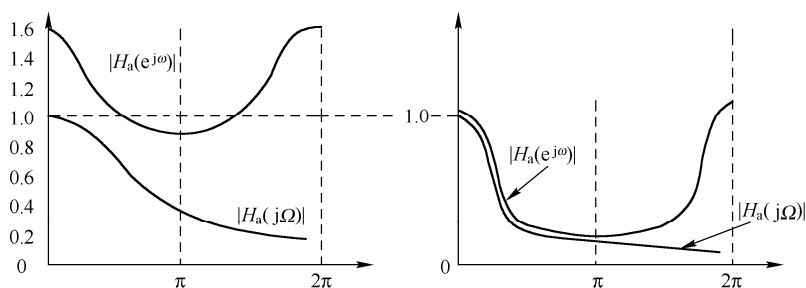
$$|H(e^{j\omega})| = \sqrt{\frac{T^2 a^2}{1 - 2\cos\omega e^{-aT} + e^{-2aT}}} \quad 0 \leq \omega \leq \pi$$

它们相应的幅度响应曲线分别如图 5-15 (a) 上和图 5-15 (a) 下所示, 由图可见, $|H(e^{j\omega})|$ 相对 $|H_a(j\Omega)|$ 失真较大 (在取 $T=0.001\text{s}$ 时), 随着 T 的减小, 两者的近似程度越来越好, 如图 5-14 (b) 所示 ($T=0.0002\text{s}$)。但是混叠依然存在, 这是由于本例题中 $|H_a(j\Omega)|$ 不是带限的 (计算结果表明,

当 $T=0.001\text{s}$ 时, $|H_a(j0)|=1$, $|H_a(j0)|=\frac{a^2}{a^2+0}=1$, $|H(e^{j0})|=1.582$, $|H(e^{j0})|=\sqrt{\frac{T^2 a^2}{1 - 2e^{-aT} + e^{-2aT}}} = \sqrt{\frac{1}{1 - 0.7357 + 0.1353}} = 1.582$, $|H(e^{j\omega})|$ 和 $|H_a(j\Omega)|$ 不同是因为 $|H_a(j0)|=1$, 而 $|H(e^{j0})|$ 是 $|H_a(j0)|$ 、 $|H_a(j2000\pi)|$ 、 $|H_a(-j2000\pi)|$ 、 $|H_a(j4000\pi)|$ 等叠加的结果 (即产生 $\omega=0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ 等处的频率成分混叠), 即 $|H_a(j0)|=1$ 、 $|H_a(j2000\pi)|=0.1571$ 、 $|H_a(-j2000\pi)|=0.1571$ 、 $|H_a(j4000\pi)|=0.08\dots$ 一系列值的叠加。当 $T=0.0002\text{s}$ 时, $|H(e^{j0})|=1.1043$ 。

计算表明, 虽然抽样频率提高了 ($T=0.0002\text{s}$), 但是混叠仍然存在, 因为 $|H_a(j\Omega)|$ 不是带限的。抽样频率提高的好处是能使数字滤波器的单位脉冲响应更加逼真模仿模拟滤波器的脉冲响应。但不能消除混叠现象 (当 $|H_a(j\Omega)|$ 不是带宽有限时), 如图 5-15 (b) 所示。

考虑要尽可能避免频率混叠, 须将数字滤波器所模仿的模拟滤波器的通带限制在 $\pm\pi/T$ 之内。考虑实际滤波器一定存在过渡带, 可选择 T 满足 $|\Omega_s| < \pi/T$ 。



(a) $T=0.001\text{s}$ 时冲激响应不变法的幅度响应 (b) $T=0.0002\text{s}$ 时冲激响应不变法的幅度响应

图 5-15 冲激响应不变法的幅度响应

④ 仿真程序如下, 仿真结果如图 5-16 所示。

```
num=1000;
den=[1,1000];
[H,W]=freqs(num,den);
figure(1)
subplot(221);
plot(W,abs(H));grid;
xlabel('frequency');ylabel('magnitude of ALPF')
Fs=1000;
[num1,den1]=impinvar(num,den,Fs);
[H1,W1]=freqz(num1,den1);
subplot(222);
plot(W1*Fs/(2*pi),abs(H1));grid;
xlabel('frequency');ylabel('magnitude of DLPF Fs=1000')
Fs1=3000
[num1,den1]=impinvar(num,den,Fs1);
[H2,W2]=freqz(num1,den1);
subplot(223);
plot(W2*Fs1/(2*pi),abs(H2));grid;
xlabel('frequency');ylabel('magnitude of DLPF Fs=3000')
Fs2=5000
[num1,den1]=impinvar(num,den,Fs2);
[H3,W3]=freqz(num1,den1);
subplot(224);
plot(W3*Fs1/(2*pi),abs(H3));grid;
xlabel('frequency');ylabel('magnitude of DLPF Fs=5000')
```

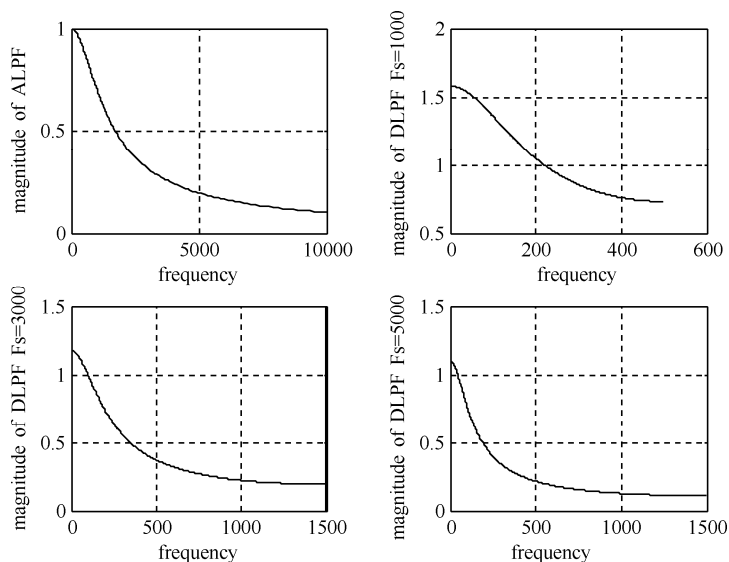


图 5-16 冲激响应不变法的幅度响应

仿真结果表明随着抽样频率提高(抽样频率分别为 1000Hz、3000Hz 和 5000Hz), 混叠逐步有所改善, 但是不能通过提高抽样频率彻底消除混叠, 因为 $|H_a(j\Omega)|$ 不是带宽有限的。

5.4 双线性变换法

在用冲激响应不变法将模拟滤波器的系统函数离散成数字滤波器的系统函数时,出现了频率混叠失真,主要是冲激响应不变法为 s 平面到 z 平面的多值映射。为了克服这个缺点,凯赛(Kaiser)和戈尔登(Golden)建议用一种新的有效的变换,这就是双线性变换。双线性变换法从根本上消除了频率混叠问题,但是在一定条件下,会出现频率转换的非线性问题。先讨论变换原理,再讨论频率转换的非线性问题。

5.4.1 变换原理

为了克服冲激响应不变法离散化产生的频率混叠失真,双线性变换法采用两次映射的方法,具体叙述如下。

1. 频率轴压缩

先将整个 s 平面映射到 s_1 平面中宽度为 $2\pi/T$ 的一个水平带域(该条状带域的频率范围为 $-\pi/T \sim +\pi/T$,如图5-17所示双线性变换的映射关系),相当于将 s 平面的频率范围($-\infty \rightarrow +\infty$)压缩到 s_1 平面的一个带域(频率范围为 $-\pi/T \sim +\pi/T$)。

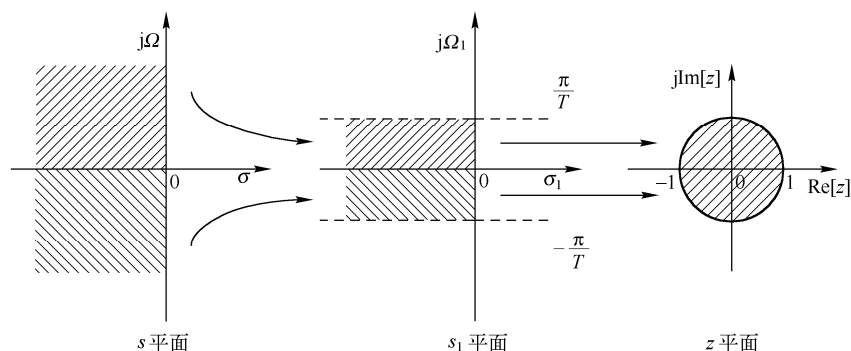


图 5-17 双线性变换的映射关系

2. 多值映射转化成一一对应的单值映射

将 s_1 平面映射到 z 平面(如图5-17所示),因为整个 s 平面与 s_1 平面对应, s_1 平面与 z 平面对应,因此 s 平面与 z 平面是一一对应的,可见 s 平面到 s_1 平面的映射是压缩映射, s_1 平面映射到 z 平面,相当于将频率范围为 $-\pi/T \sim +\pi/T$ 的 Ω 映射到 z 平面。可见双线性变换从根本上消除了 s 平面到 z 平面多值映射引起的频率混叠现象。

3. 稳定性不变性

s 平面的整个左半平面映射到 s_1 平面以虚轴为右边界的左边的带域(频率范围为 $-\pi/T \sim +\pi/T$), s_1 平面左边的带域映射到 z 平面的单位圆内,因此不会有双线性变换带来系统的稳定性问题。也就是说,模拟系统原来是稳定的,通过双线性变换离散为数字系统一定是稳定的,同时从根本上消除了频率混叠问题。

4. 频率畸变性(连续频率与数字频率转换的非线性)

双线性变换法依然用数字滤波器的频率响应模仿模拟滤波器的频率响应。双线性变换应注意的问题是在一定条件下的频率畸变问题(连续频率与数字频率转换的非线性问题)。

总结映射关系如下:

第一, s 平面映射到 s_1 平面上的水平带域 $(-\frac{\pi}{T} \sim \frac{\pi}{T})$, 相当于频率轴压缩;

第二, s_1 平面上的水平带域 $(-\frac{\pi}{T} \sim \frac{\pi}{T})$ 映射至 z 平面;

第三, 稳定性不变性。

通过上述两次映射, 将整个 s 平面到 z 平面上多值映射变成一点对一点的单值映射, 消除了多值映射造成的混叠。三个平面之间的映射关系, 决定了双线性变换法保证系统稳定性不会因离散化而带来稳定性问题。

5.4.2 模拟滤波器的数字化方法

为了把 s 平面映射到 s_1 平面的水平带域 $(-\pi/T \rightarrow \pi/T)$, 取两个平面之间的变换关系为:

$\Omega = c \cdot \tan\left(\frac{\Omega_1 T}{2}\right)$, 当 $\Omega \rightarrow \pm\infty$ 时, $\Omega_1 \rightarrow \pm\frac{\pi}{T}$ (频率轴压缩)。其中: c 为预畸变待定常数, Ω 是 s 平面的连续频率, Ω_1 是 s_1 平面的频率, 当 Ω_1 从 $-\pi/T$ 到 π/T 变化时, 对应于 Ω 在 $(-\infty, +\infty)$ 区间变化。

利用欧拉公式改写上式为

$$j\Omega = c \frac{2j\sin\left(\frac{\Omega_1 T}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\Omega_1 T}{2}\right)} = j\Omega = c \frac{e^{j\frac{\Omega_1 T}{2}} - e^{-j\frac{\Omega_1 T}{2}}}{e^{j\frac{\Omega_1 T}{2}} + e^{-j\frac{\Omega_1 T}{2}}} \quad (5-37)$$

将 s 平面和 s_1 平面的虚轴解析延拓到各自整个平面, 即令 $j\Omega = s$, $j\Omega_1 = s_1$, 可得 s 平面到 s_1 平面的关系为

$$s = c \frac{e^{\frac{s_1 T}{2}} - e^{-\frac{s_1 T}{2}}}{e^{\frac{s_1 T}{2}} + e^{-\frac{s_1 T}{2}}} = c \frac{1 - e^{-s_1 T}}{1 + e^{-s_1 T}} \quad (\text{分子和分母同乘 } e^{-\frac{s_1 T}{2}}) \quad (5-38)$$

再利用 $z = e^{s_1 T}$ (代入上式) 的变换关系, 映射 s_1 平面到 z 平面, 则有

$$s = c \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad \text{及} \quad z = \frac{c + s}{c - s} \quad (5-39)$$

可见, 由 s_1 平面到 z 平面的关系, 可得 s 平面到 z 平面的关系, 上式称为双线性变换。所以叫双线性变换, 仅仅是指变换式中 s 与 z 的关系无论是分子部分, 还是分母部分, 都是“线性”而言的。其中 c 用来调节模拟频率和数字频率之间的对应关系 (频率预畸变), 同时也调节模拟系统和数字系统频率响应特性之间的对应关系。不同的方法选择 c 可使模拟滤波器频率特性与数字滤波器频率特性在不同的频率处有相应的对应关系, 也可调整频带之间的对应关系。选择 c 通常有两种方法: 一种方法是利用正切函数近似线性段, 运用条件是模拟系统低频时, 则有 $\Omega \approx \Omega_1$; 另一种方法是选择常数 c , 使模拟滤波器在某一特定频率处 (Ω_c) 和数字滤波器的某一频率 ($\omega_c = \Omega_c T$) 有严格的对应关系。而且频率响应完全相等, 可以准确控制截止频率点, 但是在其他点上 s 平面与 z 平面的频率呈非线性 (正切关系), 两种方法介绍如下。

(1) 在低频频率处使模拟滤波器和数字滤波器有较确切的对应关系 ($\Omega = \Omega_1$, 条件是低频时)

则有由 $\Omega = c \cdot \tan\left(\frac{\Omega_1 T}{2}\right) = c \frac{\Omega_1 T}{2}$, 令 $c = \frac{2}{T} \rightarrow \Omega \approx \Omega_1$, 即 $\Omega = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\Omega_1 T}{2}\right) = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right) \Rightarrow \Omega = \omega$ 呈现模拟与数字频率相等 (利用 $\omega = \Omega_1 T$, 当低频时且 $T = 1$)。

可见模拟频率与数字频率具有线性关系。

于是 s 平面和 z 平面的映射关系(双线性变换)为

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}, \quad z = \frac{2/T+s}{2/T-s}$$

可见在低频时, 模拟滤波器和数字滤波器的特性很相近(模拟和数字频率近似相等)。

要点九: 第一种方法选择 c , 在低频模拟滤波器和数字滤波器的特性很相近(模拟和数字频率近似是似线性关系, 强调低频正是利用了正切函数的近似线性段)。

(2) 模拟滤波器在某一特定频率处 (Ω_c) 和数字滤波器的某一频率 ($\omega_c = \Omega_c T$) 有严格的对应关系, 即 $\Omega T = \omega$, 若希望有 $\Omega_c \Leftrightarrow \omega_c$, 则有

$$\Omega_c = c \tan\left(\frac{\Omega_c T}{2}\right) = c \tan\left(\frac{\omega_c}{2}\right) \Rightarrow c = \frac{\Omega_c}{\tan \frac{\omega_c}{2}} = \Omega_c \cot\left(\frac{\omega_c}{2}\right)$$

要点十: 第二种方法选择 c , 仅仅保证模拟滤波器特定频率点及其附近频率与数字滤波器频率的某个频率对应, 而且频率响应完全相等, 可以准确控制截止频率的位置。但在其他点, 两个平面的频率呈非线性关系。强调某一点及其附近的频率响应时, 用第二种方法。

应强调指出, 实际上双线性变换方法消除频率混叠是以牺牲频率的线性变换关系为代价的。所以讨论频率畸变问题, Ω 和 ω 之间的非线性关系给数字滤波器设计的幅度和相位特性带来问题, 即数字滤波器模仿模拟滤波器的幅度响应失真, 模仿的相位响应特性也失真。例如, 在相位上, 如果原来模拟滤波器是具有线性相位特性的, 经过双线性变换离散化后, 数字滤波器的相位响应变成非线性的, 不再保持原来模拟滤波器的线性相位特性, 也就不能保证性能指标的实现, 双线性变换法的频率变换关系如图 5-18 所示。

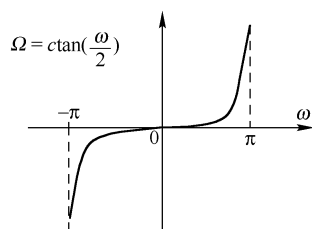


图 5-18 双线性变换法的频率变换关系

设模拟系统 $|H_a(j\Omega)|$ 具有线性幅度特性, 经过双线性变换后, 对应的数字滤波器的幅度特性已失真, 具体情况如图 5-19 所示, 由图可见, 通过双线性变换, 将模拟滤波器离散化成数字滤波器, 使 $|H_a(j\Omega)|$ 的线性的幅度响应变成了数字滤波器的非线性幅度响应(直线变成曲线), 还可以看到模拟频率与数字频率也呈现非线性(曲线), 从图中还可以看到, 如果两者频率呈线性关系, 则其响应也可呈线性关系。

解决这种畸变和失真, 通常采用预畸变的方法(常数 c 的确定)。在由数字频率转换至模拟频率时, 数字频率转换为模拟频率, 采用的是非线性转换公式, 即

$$\Omega = c \tan\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (5-40)$$

将所涉及的数字滤波器的特征频率(通带频率 ω_p 、阻带频率 ω_s 或中心频率 ω_0 等)转换成模拟滤波器的相应特征频率(通带频率 Ω_p 、阻带频率 Ω_s 或中心频率 Ω_0 等, 这一步注意频率预畸变问题), 再转换成模拟低通指标, 设计模拟低通滤波器, 再将模拟低通变换成与要设计的数字滤波器同一类型的模拟滤波器, 最后用双线性变换法将此模拟滤波器的系统函数转换成实际所要设计的数字滤波器的系统函数。

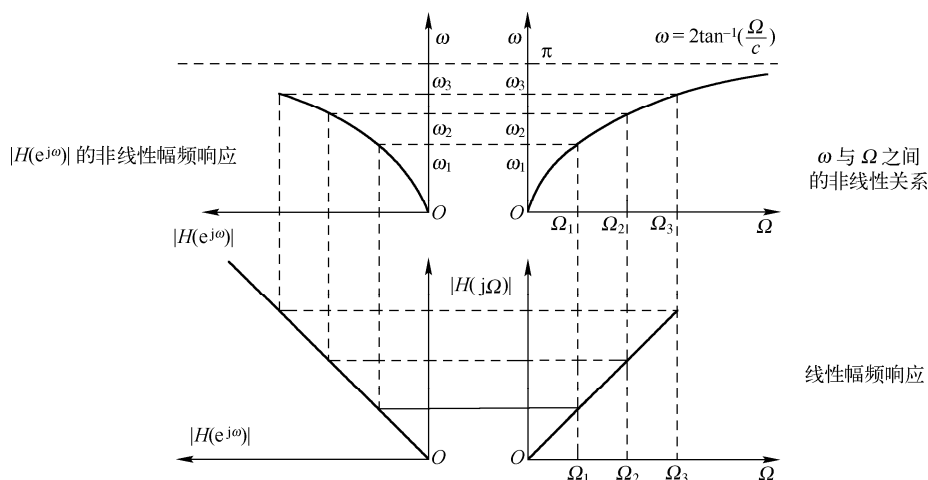


图 5-19 双线性变换产生的频率畸变

5.4.3 用双线性变换法实现 IIR 数字滤波器

利用双线性变换法设计 IIR 数字低通滤波器的步骤如下。

1. 确定数字低通滤波器指标设计 (两个边界频率: 通带和阻带边界频率, 分别为 ω_p 和 ω_s ; 两个衰减: 通带最大衰减和阻带最小衰减, 分别为 δ_p 和 δ_s)。

2. 数字低通滤波器指标转换为模拟低通滤波器指标 (两个边界频率和两个衰减, 利用 $\Omega = c \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$ 转换边界频率: $\omega_c \rightarrow \Omega_c$, $\omega_s \rightarrow \Omega_s$, 两个衰减保持不变)。

3. 按照转换过来的技术指标设计归一化模拟低通滤波器 (设计方法同前), 非归一化 (去归一化) 得到所要求的实际的模拟滤波器的系统函数 $H_a(s)$ 。

4. 利用双线性变换公式, 将模拟低通滤波器系统函数转换为数字低通滤波器系统函数 (直接代入双线性公式, 参见下式)。

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=c \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

这里还有一个 c 的确定, 一般情况下, c 取 $2/T$, T 取 1 (还可以按特定频率确定取 c 值, 即 $c = \Omega_c \cot\left(\frac{\omega_c}{2}\right)$)。双线性变换法从根本上消除了频率混叠。抽样周期 T 可任选, 为简化, 取 $T=1$ 。

【例 5-5】 已知一阶模拟低通滤波器系统函数为 $H_a(s) = \frac{\Omega_c}{s + \Omega_c}$, 其中 Ω_c 为其 3dB 带宽。用双线性变换法将其转换为数字滤波器的系统函数 $H(z)$, 并要求其 3dB 带宽为 $\omega_p = 0.1\pi$ 。

解: 1. 将数字低通滤波器指标 (两个边界频率和两个衰减) 转换为模拟低通滤波器指标:

① 模拟低通滤波器的通带 3dB 截止频率 Ω_c

利用频率转换公式 $\Omega_c = c \tan\left(\frac{\omega_c}{2}\right)$, 将数字滤波器 3dB 带宽 $\omega_p = \omega_c$ 频率转换为模拟滤波器的通带 3dB 截止频率 Ω_p , 模拟滤波器的通带截止频率为

$$\Omega_c = c \tan(\omega_c / 2) = c \tan(0.1\pi \times 57.3 \times 0.5) = 0.1583c$$

② 两个衰减

本题对衰减指标没有要求,但是给出一阶模拟低通滤波器的系统函数,因此省略了求一阶模拟低通系统函数的步骤,确定模拟滤波器的通带3dB截止频率 Ω_c 后,直接离散化。

将 $\Omega_c = 0.1584c$ 代入模拟滤波器的系统函数中,则有

$$H(s) = \frac{\Omega_c}{s + \Omega_c} = \frac{0.1584c}{s + 0.1584c}$$

2. 利用双线性变换公式 $s = c \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ 将模拟低通滤波器系统函数转换为数字低通滤波器的系统函数

$$H(z) = H(s) \Big|_{s=c \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{0.1584c}{c \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 0.1584c} = \frac{0.1584(1+z^{-1})}{1-z^{-1} + 0.1584(1+z^{-1})} = \frac{0.1367(1+z^{-1})}{1-0.7265z^{-1}}$$

在计算过程中可见常数 c 消掉了,一般取 $c=1$ (注意:已经求出的 Ω_c 是预畸变的)。

3. 求数字滤波器的频率响应(令 $z = e^{j\omega}$ 代入 $H(z)$),则有 $H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{0.1367(1+e^{-j\omega})}{1-0.7265e^{-j\omega}}$,

当 $\omega=0$ 时, $20\lg|H(e^{j\omega})|=0$,即 $|H(e^{j\omega})|=1$,当 $\omega=0.1\pi$ 时, $20\lg|H(e^{j\omega})|=-3\text{dB}$, $|H(e^{j\omega})|=0.707$,满足设计要求。

4. 仿真程序如下,仿真结果如图5-20所示。

```
num=0.1584;
den=[1,0.1584];
[H,W]=freqs(num,den);
figure(1)
subplot(221);
plot(W,abs(H));grid;
xlabel('frequency');ylabel('magnitude of ALPF')
axis([0,1,0,1])
Fs=0.5;
[num1,den1]=bilinear(num,den,0.5);
[H1,W1]=freqz(num1,den1);
subplot(222);
plot(W1,abs(H1));grid;
xlabel('frequency');ylabel('magnitude of DLPF T=2')
axis([0,1,0,1])
```

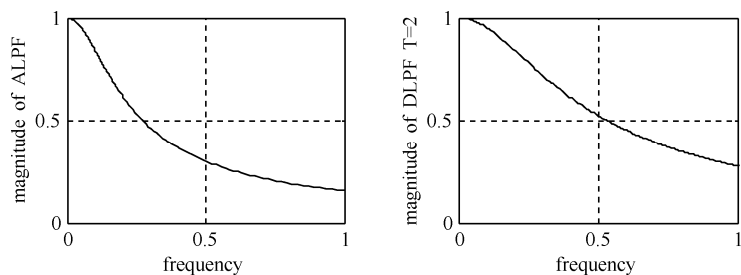


图5-20 双线性变换法的幅度响应

要点十一: 双线性变换法离散化,频率转换一定用频率转换公式 $\Omega_c = c \tan\left(\frac{\omega_c}{2}\right)$ 。

要点十二：设计滤波器时进行指标转换，衰减指标总是保持不变。

总结双线性变换的优点和缺点如下。

优点：

- ① 从根本上避免了频率混叠现象；
- ② 通过常数 c 的选择可以预畸变（可以在低频或特定频率点处）；
- ③ 离散化简单，只需将 $s = c \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ 代入模拟低通滤波器的系统函数中，替换 s 即可。

缺点：

连续与数字频率之间为非线性关系，转换后的幅频和相频特性与原模拟滤波器的幅相特性偏离。例如，一个模拟线性相位滤波器经过双线性离散化后得到一个非线性相位的数字滤波器，这种非线性关系使模拟滤波器的幅度响应是分段常数型的（这与一般典型的低通、高通、带通和带阻滤波器的响应特性是一致的），否则离散化后的数字滤波器幅度响应相对模拟滤波器的幅度响应会有畸变。对于分段常数的滤波器（某一频率段的幅度响应近似等于某一常数），经双线性变换法离散化后，得到幅度特性为分段常数的滤波器，但是各个分段边缘的临界频率点产生畸变，可以采用第二种方法选择 c ，进行预畸变补偿。实际上可根据设计指标的具体要求确定常数 c 。

5.5 用模拟低通滤波器设计 IIR 数字滤波器

上两节分别讨论了将模拟滤波器的系统函数转换成数字滤波器系统函数的两种离散化方法，即冲激响应不变法和双线性变换法。两种方法无一例外，目前来说都局限于模拟低通到数字低通的离散化，应该指出，前一种离散化方法仅适用于低通和带通，后一种离散化方法对模拟低通、高通、带通和带阻的离散化都适用。在对 IIR 数字滤波器设计方法拓展时就会搞清楚这个问题。因此引进频率域变换法设计，其中一种方法是如何设计模拟高通、模拟带通和模拟带阻滤波器，然后再将其离散化成对应的数字滤波器。另一种方法是如何由数字低通直接设计 IIR 数字高通、数字带通和数字带阻滤波器。IIR 数字滤波器频率变换法设计的两种方法，即：模拟频率→模拟频率变换（简称为模拟域频率变换法，或 s 域频率变换法）和数字频率→数字频率变换（简称为数字域频率变换法，或 z 域频率变换法）。

1. 模拟域频率变换法设计 IIR 滤波器的基本步骤

- (1) 确定的数字滤波器的性能指标，按照某种频率转换关系，转换成与数字滤波器同一类（低通、高通、带通和带阻滤波器）型的模拟滤波器的性能指标（冲激响应不变法和双线性变换法离散化，频率转换用不同的公式）。
- (2) 用模拟域频率变换转换成模拟低通指标，设计归一化模拟低通原型滤波器。
- (3) 用频率域变换转换成与数字滤波器同一类型的模拟滤波器（高通、带通和带阻滤波器）。
- (4) 用离散化方法（两种方法选择其中之一）将模拟滤波器的系统函数离散化成要设计的数字滤波器的系统函数。

2. 数字域频率变换法设计 IIR 滤波器的基本步骤

- (1) 将数字滤波器的性能指标转换为与数字滤波器同一类（低通、高通、带通和带阻滤波器）型的模拟滤波器指标（冲激响应不变法和双线性变换法离散化，频率转换用不同的公式）。
- (2) 用模拟域频率变换转换成模拟低通指标，设计归一化模拟低通原型滤波器。
- (3) 用离散化方法（两种方法选择其中之一，视具体情况而定），将模拟低通滤波器的系统函数离散化成数字低通滤波器的系统函数。
- (4) 用数字域频率变换法将数字低通滤波器的系统函数转换成所要设计的数字滤波器的系统函数。

两种频率设计法的流程以框图形式给出,如图 5-21 所示。

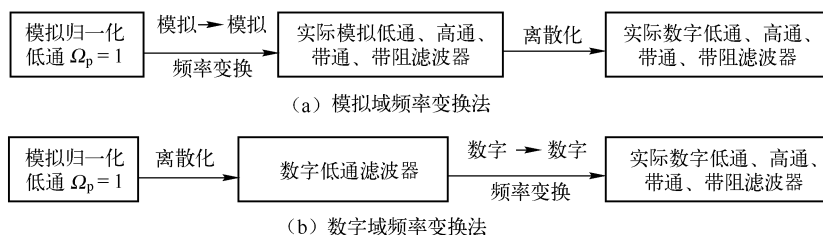


图 5-21 通过频率变换法设计 IIR 滤波器

本节讲述用模拟域频率变换法设计 IIR 数字滤波器。

用模拟频率→模拟频率变换方法,在模拟域设计模拟滤波器及其模拟型滤波器之间的频率转换由表 5-1 给出,其中, Ω 为实际滤波器的角频率; $\bar{\Omega}$ 为模拟原型归一化低通滤波器角频率; s 为实际滤波器的系统变量,是 $j\Omega$ 轴解析延拓到全 s 平面; \bar{s} 为原型归一化低通滤波器的系统变量,是 $j\bar{\Omega}$ 轴解析延拓到全 \bar{s} 平面。

对表 5-1 需要说明如下。

- (1) 归一化原型低通滤波器通带边界频率为 1 (归一化处理);
- (2) 带通带宽 $B = \Omega_{p2} - \Omega_{p1}$, Ω_{p2} 和 Ω_{p1} 为通带边界频率;
- (3) Ω_0 为带通滤波器的中心频率, $\Omega_0 = \sqrt{\Omega_{p1}\Omega_{p2}}$ 。

表 5-1 模拟滤波器系统的频率平面变换关系

变换类型	频率变换关系	s 平面变换关系
低通→原型归一化低通	$\bar{\Omega} = \frac{\Omega}{\Omega_p}$	$\bar{s} = \frac{s}{\Omega_s}$
高通→原型归一化低通	$\bar{\Omega} = -\frac{\Omega_p}{\Omega}$	$\bar{s} = \frac{\Omega_p}{s}$
带通→原型归一化低通	$\bar{\Omega} = \frac{\Omega^2 - \Omega_0^2}{\Omega B}$	$\bar{s} = \frac{s^2 + \Omega_0^2}{sB}$
带阻→原型归一化低通	$\bar{\Omega} = \frac{\Omega \cdot B}{\Omega_0^2 - \Omega^2}$	$\bar{s} = \frac{s \cdot B}{s^2 + \Omega_0^2}$

5.5.1 模拟低通滤波器转换成数字低通滤波器

用模拟频率变换方法设计 IIR 数字低通滤波器的主要步骤如下。

- (1) 将数字低通滤波器指标转换为模拟低通滤波器指标(频率转换公式,脉冲响应不变法: $\Omega = \omega/T$, 双线性法: $\Omega = c \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$, 滤波器类型之间转换,衰减保持不变)。

(2) 根据两个边界频率和两个衰减指标求原型低通滤波器的阶次 N , 查表得归一化原型低通滤波器的系统函数。

(3) 求实际模拟低通滤波器的系统函数(求 3dB 截止频率,非归一化)。即将原型低通滤波器的系统函数转换成实际模拟低通滤波器系统函数。

(4) 用冲激响应不变法或双线性变换法转换模拟低通滤波器的系统函数为数字滤波器的系统函数。

(5) 求数字滤波器的频率响应,验证是否满足性能指标要求,如不满足指标要求,可重新设计(提高阶数等)。

【例 5-6】 试用冲激响应不变法设计数字低通滤波器,要求在通带 $0 \sim 0.2\pi$ rad 内允许幅度误差衰减在 3dB 以内,在频率 $0.6\pi \sim \pi$ rad 内阻带衰减为 18dB。要求通、阻带衰减单调,给定抽样周期 $T = 0.001$ s。

解: 1. 将数字低通滤波器的性能指标转换为模拟滤波器性能指标

① 数字低通滤波器的性能指标为(两个边界频率,两个衰减)

通带频率 $\omega_p = 0.2\pi$ rad。

阻带频率 $\omega_s = 0.6\pi$ rad。

通带最大衰减 $\delta_p = 3$ dB。

阻带最小衰减 $\delta_s = 18$ dB。

② 转换为模拟滤波器指标(频率转换关系式 $\Omega = \omega/T$, 冲激响应不变法用此公式)

通带频率 $\Omega_p = \omega_p / T = 0.2\pi / T = 200\pi$ rad/s。

阻带频率 $\Omega_s = \omega_s / T = 0.6\pi / T = 600\pi$ rad/s。

通带最大衰减 $\delta_p = 3$ dB。

阻带最小衰减 $\delta_s = 18$ dB。

(滤波器类型转换,衰减指标总是不变的)。

2. 设计巴特沃斯原型归一化低通滤波器(由通带、阻带衰减单调要求决定)

① 求滤波器阶数(根据模拟低通滤波器计算 N 的公式,代入两个边界频率、两个衰减)

$$N \geq \lg \left[\frac{10^{0.1\delta_s} - 1}{10^{0.1\delta_p} - 1} \right] / 2 \lg \left[\frac{\Omega_s}{\Omega_p} \right] \text{ 或 } N \geq \lg \left[\frac{10^{0.1\delta_p} - 1}{10^{0.1\delta_s} - 1} \right] / 2 \lg \left[\frac{\Omega_p}{\Omega_s} \right]$$

$$= \lg \left[\frac{63.0957 - 1}{1.9952 - 1} \right] / 2 \lg [600 / 200] = \frac{1.7952}{0.9542} = 1.8813$$

根据取 N 的原则,则 $N = 2$,这样取滤波器阶数指标,改善了滤波器的性能。

② 求归一化低通滤波器的系统函数

根据 $N = 2$,查巴特沃斯归一化低通滤波器图表(见附录 A),得归一化低通滤波器的系统函数为

$$H_a(\bar{s}) = \frac{1}{(\bar{s}^2 + \sqrt{2}\bar{s} + 1)}$$

③ 将归一化原型模拟低通滤波器的系统函数转换成实际模拟低通滤波器的系统函数

a. 归一化原型低通滤波器的系统函数转换成实际低通滤波器的系统函数(用非归一化转换公式

$$\bar{s} = \frac{s}{\Omega_c})$$

b. 实际模拟滤波器的系统函数为

$$H_a(s) = H_a(\bar{s}) \Big|_{\bar{s} = \frac{s}{\Omega_c}} = H_a \left(\frac{s}{\Omega_c} \right) = \frac{1}{(s^2 / \Omega_c^2 + \sqrt{2}s / \Omega_c + 1)}$$

将 $\bar{s} = \frac{s}{\Omega_c}$ 代入 $H_a(\bar{s})$ 即可。

c. 归一化频率的选取

有两种选择公式,取决于设计问题要突出通带还是阻带,但是本题不用计算,3dB 频率已给出,即 $\Omega_c = \Omega_p = 200\pi$ rad/s。

将上式的归一化频率代入实际低通滤波器的系统函数,有

$$\begin{aligned}
 H_a(s) &= H_{an}(\bar{s}) \Big|_{\bar{s}=\frac{s}{\Omega_c}} = H_{an}\left(\frac{s}{\Omega_c}\right) \\
 &= \frac{\Omega_c^2}{(s^2 + \Omega_c\sqrt{2}s + \Omega_c^2)} = \frac{j\Omega_c/\sqrt{2}}{\left(s + \frac{\sqrt{2}+j\sqrt{2}}{2}\Omega_c\right)} - \frac{j\Omega_c/\sqrt{2}}{\left(s + \frac{\sqrt{2}-j\sqrt{2}}{2}\Omega_c\right)} \\
 &= \frac{j\beta}{[s-(\beta+j\beta)]} - \frac{j\beta}{[s-(\beta-j\beta)]}, \quad (\text{令 } \beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}\Omega_c)
 \end{aligned}$$

3. 用冲激响应不变法, 将实际低通滤波器的系统函数转换成数字低通滤波器的系统函数

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \frac{-Tj\beta}{1-e^{(\beta+j\beta)T}z^{-1}} - \frac{-Tj\beta}{1-e^{(\beta-j\beta)T}z^{-1}} \\
 &= \frac{2T\beta z^{-1}e^{\beta T} \sin(\beta T)}{1-2z^{-1}e^{\beta T} \cos(\beta T) + z^{-2}e^{2\beta T}} \\
 &= \frac{0.2449z^{-1}}{1-z^{-1}1.1580 + z^{-2}0.4112}
 \end{aligned}$$

4. 求数字滤波器的频率响应, 验证是否满足性能指标要求, 如不满足指标要求, 可增高阶数或调整数字滤波器的参数。该数字滤波器的频率响应如图 5-22 所示。

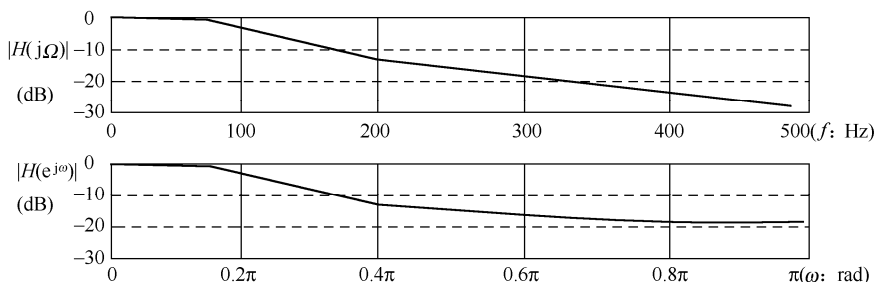


图 5-22 例 5-6 模拟滤波器与数字滤波器的幅频响应曲线

图 5-22 给出了模拟低通滤波器的 $H_a(j\Omega)$ 和数字滤波器的 $H(e^{j\omega})$ 的对数幅频特性曲线, 对比两者幅频特性曲线可见, 模拟滤波器的通带、阻带衰减指标完全符合要求, 但是数字滤波器指标没有达到要求, 这是混叠产生的结果。因为模拟滤波器不是带宽有限的。

通过提高抽样频率和增加阶数都不能从根本上解决频率混叠问题, 还要考虑限制带宽。

在模拟滤波器带宽有限的条件下, 提高抽样频率和增加阶数, 可改善滤波器频率响应特性。这就是此种方法离散化的局限性。

5. 仿真程序如下, 仿真结果如图 5-23 所示。

```

wp=0.2*pi
ws=0.6*pi
Rp=3;
Rs=18;
T=0.001
Wp=(0.2*pi)/T
Ws=(0.6*pi)/T
[N,Wl]=buttord(Wp,Ws,Rp,Rs,'s')
[Z,P,K]=buttap(N)
[A,B,C,D]=zp2ss(Z,P,K)

```

```

[AT,BT,CT,DT]=lp2lp(A,B,C,D,W1)
[num1,den1]=ss2tf(AT,BT,CT,DT)
[h,w]=freqs(num1,den1,'s')
figure( 6);
subplot(221);plot(w,20*log10(abs(h)));grid;
xlabel('frequency');ylabel('magnitude of ALPF')
[num2,den2]=bilinear(num1,den1,Fs)
[H,W]=freqz(num2,den2)
subplot(222);plot(W,20*log10(abs(H)));
grid;
xlabel('frequency');ylabel('magnitude of DLPF')
axis([0,3.5,-120,0])

```

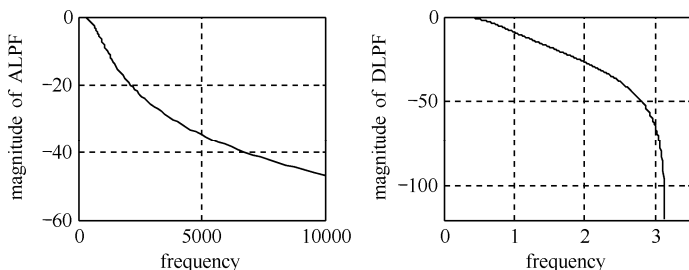


图 5-23 例 5-6 模拟滤波器与数字滤波器仿真的幅频响应曲线

要点十三：冲激响应不变法只能设计数字低通和带通滤波器。

5.5.2 模拟低通滤波器转换成数字带通滤波器

实际设计时,应先将数字带通指标转换成模拟带通指标,再将模拟带通指标转换成模拟低通指标,设计模拟低通滤波器后,再将其转换成模拟带通,最后将模拟带通滤波器离散化成数字带通滤波器。这里没有给出数字带通滤波器指标转换成模拟低通指标的过程,所以转换步骤是指由模拟低通到数字带通的转换,不是数字带通滤波器设计的全过程(这里假设由数字带通滤波器指标已设计出模拟低通滤波器)。设计步骤如下。

1. 由归一化原型低通滤波器到模拟带通滤波器的转换(模拟频率 \rightarrow 模拟频率变换方法)。
2. 由模拟带通滤波器到数字带通的转换(离散化处理)。

首先讨论由归一化原型低通滤波器到模拟带通滤波器转换的频率变换关系,归一化模拟低通幅度特性 $|H_{aLP}(j\bar{\Omega})|$ 和模拟带通滤波器的幅度特性 $|H_{aBP}(j\Omega)|$ 如图 5-24 所示。

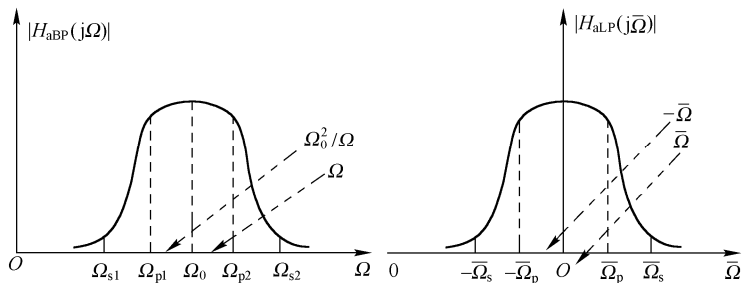


图 5-24 实际模拟带通滤波器与归一化原型模拟低通滤波器的幅度特性

带通滤波器指标为

- (1) Ω_{p2} 和 Ω_{p1} 分别为带通滤波器通带的上下限频率。
 (2) Ω_{s2} 和 Ω_{s1} 分别为带通滤波器阻带的上下限频率。
 (3) B : 通带带宽 ($B = \Omega_{p2} - \Omega_{p1}$), 一般选择 B 为归一化参考频率。

Ω_0 : 中心频率 ($\Omega_0 = \sqrt{\Omega_{p2}\Omega_{p1}}$), $\Omega_0^2 = \Omega_{p2}\Omega_{p1}$ 为几何中心频率。

归一化原型低通滤波器指标为

- (1) $\bar{\Omega}_p$: 通带频率 ($\bar{\Omega}_p = 1$)。
 (2) $\bar{\Omega}_s$: 阻带频率。

根据如图 5-24 所示的两种滤波器的幅度特性, 讨论模拟带通滤波器幅度特性 $|H_{\text{aBP}}(j\Omega)|$ 和归一化原型模拟低通滤波器幅度特性 $|H_{\text{aLP}}(j\bar{\Omega})|$ 的对应性, 以及两者频率的对应关系, 据此给出 $\bar{\Omega}$ 与 Ω 的频率对应表 (如表 5-2 所示)。

表 5-2 $\bar{\Omega}$ 与 Ω 的频率对应表

$\bar{\Omega}$	$-\infty$	$-\bar{\Omega}_s$	$-\bar{\Omega}_p$	0	$\bar{\Omega}_p$	$\bar{\Omega}_s$	∞
Ω	0	Ω_{s1}	Ω_{p1}	Ω_0	Ω_{p2}	Ω_{s2}	∞

根据如图 5-24 所示的两种滤波器幅度特性的对应性和如表 5-2 所示的 $\bar{\Omega}$ 与 Ω 的频率对应性, 有如下关系。

模拟带通在 $\Omega_0 \sim \Omega_{p2}$ 范围内找到一点 Ω , 它在归一化模拟低通的 $\bar{\Omega}$ 轴上对应的点应在 $0 \sim \bar{\Omega}_p$ 范围内, 由于 $\Omega_{p2} = \frac{\Omega_0^2}{\Omega_{p1}}$, 则模拟带通滤波器的 Ω 点在 Ω 轴上对应的点应是 Ω_0^2 / Ω , 模拟低通的 $\bar{\Omega}$ 在 $\bar{\Omega}$ 轴上对应的点应是 $-\bar{\Omega}$, 因此 Ω 与 $\bar{\Omega}$ 的转换关系为

$$\frac{\Omega - \Omega_0^2 / \Omega}{\Omega_{p2} - \Omega_{p1}} = \frac{2\bar{\Omega}}{2\bar{\Omega}_p}$$

上式关系的成立是由于模拟带通滤波器通带内频带宽度与通带宽度之比, 等于模拟低通滤波器通带内频带宽度与通带宽度之比。同时利用了中心频率的概念, 并考虑了带通滤波器和归一化低通滤波器的频带的对应性。

考虑 $B = \Omega_{p2} - \Omega_{p1} = 1$ (选择 B 为归一化参考频率), $\bar{\Omega}_p = 1$ (归一化的概念), Ω 与 $\bar{\Omega}$ 的转换关系可以简化为

$$\bar{\Omega} = \frac{\Omega^2 - \Omega_0^2}{\Omega B} \quad (5-41)$$

可见实现了频率转换, 现在可以利用这个关系将带通滤波器指标转换为归一化的低通滤波器的指标。

频率指标转换

$(\Omega_{p1}, \Omega_{p2}) \Rightarrow \bar{\Omega}_p$ (带通两个边界频率转换成归一化模拟低通通带边界频率)。

$(\Omega_{s1}, \Omega_{s2}) \Rightarrow \bar{\Omega}_s$ (阻带两个边界频率转换成归一化模拟低通阻带边界频率, 取 $\bar{\Omega}_s = \min(|\Omega_{s1}|, |\Omega_{s2}|)$)。

衰减指标转换

$\delta_p \Rightarrow \delta_p$ (通带最大衰减不变)。

$\delta_s \Rightarrow \delta_s$ (阻带最小衰减不变)。

接下来根据归一化原型低通性能指标(两个衰减和边界频率),用设计归一化低通滤波器的方法求出 N ,查表可以得到归一化低通的系统函数 $H_{\text{alp}}(\bar{s})$,再将 $\bar{s} = \frac{s^2 + \Omega_0^2}{sB}$ (将 Ω 和 $\bar{\Omega}$ 解析开拓到 s 和 \bar{s} 平面,即 $s = j\Omega$, $\bar{s} = j\bar{\Omega}$,并代入 $\bar{\Omega} = \frac{\Omega^2 - \Omega_0^2}{\Omega B}$,得到 $\bar{s} = \frac{s^2 + \Omega_0^2}{sB}$) 代入归一化原型低通滤波器的系统函数 $H_{\text{aLP}}(\bar{s})$,得到实际模拟带通滤波器的系统函数 $H_{\text{dBP}}(s)$,即

$$H_{\text{aBP}}(s) = H_{\text{aLP}}(\bar{s}) \bigg|_{\bar{s} = \frac{s^2 + \Omega_0^2}{sB}}$$

模拟带通滤波器变换成数字带通滤波器采用双线性变换法,将模拟带通滤波器离散化成数字带通滤波器,具体做法如下

$$H_{\text{dBP}}(z) = H_{\text{aBP}}(s) \bigg|_{s=c \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

式中, $H_{\text{dBP}}(z)$ 为数字带通的系统函数,常数 c 为预畸变系数。

在模拟带通滤波器离散化成数字带通滤波器时,也可以用冲激响应不变法离散化,但是要将 $H_{\text{dBP}}(z)$ 展开成部分分式,根据一阶和二阶基本节对应转换,或者用 Z 变换查表转换,一般来讲不如双线性法直接代入公式转换方便。但是两种转换各有特点,视具体要求而定。

总结 IIR 数字带通滤波器的设计步骤如下。

(1) 确定数字带通滤波器的性能指标,包括通带和阻带上下限频率、通带中心频率和两个衰减 (δ_p, δ_s)。

(2) 将数字带通滤波器的性能指标转换成模拟带通指标。

(3) 将模拟带通滤波器的性能指标转换成归一化低通性能指标。

(4) 计算阶数 N ,查表得到归一化低通系统函数。

(5) 将归一化低通滤波器系统函数转换成模拟带通滤波器的系统函数。

(6) 将模拟带通滤波器的系统函数离散化成数字带通滤波器的系统函数(有如下两种方法)。

① 用冲激响应不变法将 $H_{\text{aBP}}(s)$ 展成部分分式,通过基本节(一阶节和二阶节)对应转换或查 Z 变换表(实质上就是求 Z 变换)。

② 用双线性变换法,直接代入公式转换

$$H_{\text{dBP}}(z) = H_{\text{aBP}}(s) \bigg|_{s=c \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

模拟域频率变换和离散化一步完成,按下式进行运算

$$H_{\text{dBP}}(z) = H_{\text{aLP}}(\bar{s}) \bigg|_{\bar{s} = \frac{c^2(1-z^{-1})^2 + \Omega_0^2(1+z^{-1})^2}{(1-z^{-2})B}}$$

【例 5-7】 试用双线性变换法设计一个抽样频率为 1kHz 的数字带通滤波器。要求:通带范围为 200~250Hz,在此两频率处衰减不大于 3dB,在 100Hz 和 400Hz 频率处衰减不得小于 25dB。要求通带、阻带衰减单调。

解:(1) 将要设计的数字滤波器的性能指标转换为模拟带通滤波器的性能指标(注意离散化方法不同,频率转换公式也不同,冲激响应不变法: $\omega = \Omega T$,双线性变换法: $\Omega = c \tan \frac{\omega}{2}$;注意 c 的选择,考虑预畸变)。

① 数字滤波器的频率转换成角频率(利用 $\omega = \Omega T_s = 2\pi f T_s = 2\pi f / f_s$, T_s 为抽样周期)。

$$\omega_{p1} = 2\pi \frac{f_{p1}}{f_s} = 2\pi \frac{200}{10^3} = 0.4\pi,$$

$$\omega_{p2} = 2\pi \frac{f_{p2}}{f_s} = 2\pi \frac{250}{10^3} = 0.5\pi,$$

$$\omega_{s1} = 2\pi \frac{f_{s1}}{f_s} = 2\pi \frac{100}{10^3} = 0.2\pi,$$

$$\omega_{s2} = 2\pi \frac{f_{s2}}{f_s} = 2\pi \frac{400}{10^3} = 0.8\pi$$

② 将数字带通频率转换为模拟带通频率，并预畸变（一定用双线性法的频率转换公式 $\Omega = c \tan \frac{\omega}{2}$ ，双线性变换法预畸变是由数字域频率指标向模拟域频率指标的转换时必须考虑的）。

数字频率转换为模拟频率

$$\Omega_{p1} = c \tan \frac{\omega_{p1}}{2}, \quad \Omega_{p2} = c \tan \frac{\omega_{p2}}{2},$$

$$\Omega_{s1} = c \tan \frac{\omega_{s1}}{2}, \quad \Omega_{s2} = c \tan \frac{\omega_{s2}}{2}$$

③ 衰减转换。

两个衰减保持不变，即

$$\delta_p = 3\text{dB}, \quad \delta_s = 25\text{dB}$$

（2）利用模拟低通 \leftrightarrow 模拟带通频率转换公式，分别求出归一化原型低通滤波器的通带频率和阻带频率。

① 归一化原型低通滤波器通带频率为

$$\bar{\Omega}_{p1} = \frac{\Omega^2 - \Omega_0^2}{\Omega B} \bigg|_{\Omega=\Omega_{p1}} = \frac{\Omega_{p1}^2 - \Omega_{p1}\Omega_{p2}}{\Omega_{p1}(\Omega_{p2} - \Omega_{p1})} = -1,$$

$$\bar{\Omega}_{p2} = \frac{\Omega^2 - \Omega_0^2}{\Omega B} \bigg|_{\Omega=\Omega_{p2}} = \frac{\Omega_{p2}^2 - \Omega_{p1}\Omega_{p2}}{\Omega_{p2}(\Omega_{p2} - \Omega_{p1})} = 1,$$

这里取归一化原型低通滤波器的通带频率 $\bar{\Omega}_p = 1$ ，通带最大衰减为 3dB。

② 归一化原型低通滤波器阻带频率为

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_{s1} &= \frac{\Omega^2 - \Omega_0^2}{\Omega B} \bigg|_{\Omega=\Omega_{s1}} = \frac{\Omega_{s1}^2 - \Omega_{p1}\Omega_{p2}}{\Omega_{s1}(\Omega_{p2} - \Omega_{p1})} = \frac{\tan^2 \frac{\omega_{s1}}{2} - \tan \frac{\omega_{p1}}{2} \tan \frac{\omega_{p2}}{2}}{\tan \frac{\omega_{s1}}{2} \left(\tan \frac{\omega_{p2}}{2} - \tan \frac{\omega_{p1}}{2} \right)} \\ &= \frac{\tan^2 0.1\pi - \tan 0.25\pi \tan 0.2\pi}{\tan 0.1\pi (\tan 0.25\pi - \tan 0.2\pi)} = -6.99 \quad (\text{常数 } c \text{ 抵消掉}) \end{aligned}$$

$$\bar{\Omega}_{s2} = \frac{\Omega^2 - \Omega_0^2}{\Omega B} \bigg|_{\Omega=\Omega_{s2}} = \frac{\tan^2 \frac{\omega_{s2}}{2} - \tan \frac{\omega_{p1}}{2} \tan \frac{\omega_{p2}}{2}}{\tan \frac{\omega_{s2}}{2} \left(\tan \frac{\omega_{p2}}{2} - \tan \frac{\omega_{p1}}{2} \right)} = 10.39$$

取归一化原型低通滤波器的阻带频率为 $\bar{\Omega}_s = \min(|\bar{\Omega}_{s1}|, |\bar{\Omega}_{s2}|) = 6.99$ 。

(3) 设计归一化原型低通滤波器。

① 计算归一化原型低通滤波器阶数为

$$N \geq \lg \left[\frac{10^{0.1\delta_s} - 1}{10^{0.1\delta_p} - 1} \right] / 2 \lg \left[\frac{\bar{\Omega}_s}{\bar{\Omega}_p} \right] = \lg \left[\frac{10^{2.5} - 1}{10^{0.3} - 1} \right] / 2 \lg[6.99] = \frac{2.5007}{1.6889} = 1.4806$$

这里取 $N = 2$, $\Omega_c = \bar{\Omega}_p = 1$ 。

② 查表得到的归一化巴特沃斯原型低通滤波器的系统函数为

$$H_{\text{alP}}(\bar{s}) = \frac{1}{\bar{s}^2 + 1.41\bar{s} + 1}$$

(4) 将归一化巴特沃斯原型低通滤波器变换为实际带通滤波器 (根据低通→带通变换公式) 的系统函数。

$$\begin{aligned} H_{\text{aBP}}(s) &= H_{\text{alP}}(\bar{s}) \Big|_{\bar{s} = \frac{s^2 + \Omega_0^2}{sB}} = \frac{1}{\left(\frac{s^2 + \Omega_0^2}{sB} \right)^2 + 1.41 \left(\frac{s^2 + \Omega_0^2}{sB} \right) + 1} \\ &= \frac{(sB)^2}{(sB)^2 + 1.41sB(s^2 + \Omega_0^2) + (s^2 + \Omega_0^2)^2} \end{aligned}$$

(5) 将实际模拟带通滤波器的系统函数通过双线性离散化成数字带通的系统函数

$$\begin{aligned} H_{\text{dBP}}(z) &= H_{\text{aBP}}(s) \Big|_{s=c \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \\ &= \frac{\left[c \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) B \right]^2}{\left\{ c^2 \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^2 B^2 + 1.41c \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) B \left[c^2 \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^2 + \Omega_0^2 \right] + \left[c^2 \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^2 + \Omega_0^2 \right]^2 \right\}} \\ &= \frac{(1-z^{-2})^2 (cB)^2}{(cB)^2 (1-z^{-2})^2 + 1.41(1-z^{-2})cB[c^2(1-z^{-1}) + \Omega_0^2(1+z^{-1})^2] + [c^2(1-z^{-1})^2 + \Omega_0^2(1+z^{-1})^2]^2} \end{aligned}$$

式中, 参数 Ω_0^2 、 B 的取值为

$$\Omega_0^2 = \Omega_{p1} \Omega_{p2} = c \tan \frac{\omega_{p1}}{2} \cdot c \tan \frac{\omega_{p2}}{2} = 0.7265c^2$$

$$B = \Omega_{p2} - \Omega_{p1} = \left(c \tan \frac{\omega_{p2}}{2} - c \tan \frac{\omega_{p1}}{2} \right) = 0.2734c^2$$

将参数代入上式整理后, 得到数字带通滤波器的系统函数 (关于 z 或 z^{-1} 的有理函数)。仿真程序如下, 仿真结果如图 5-25 所示。

```
wp1=(2*pi*200)/1000;
wp2=(2*pi*250)/1000;
ws1=(2*pi*100)/1000;
ws2=(2*pi*400)/1000;
rp=3;
rs=25;
Fs=1000;
Wp=1
Ws=6.99
[N,Wc]=buttord(Wp,Ws,rp,rs,'s')
[Z,P,K]=butter(N,Wp,'s');
```

```

[num1,den1]=zp2tf(Z,P,K)
HLP=tf(num1,den1)
[num3,den3]=lp2bp(num1,den1,0.8527*1000,0.2738*1000)
[H5,W5]=freqs(num3,den3)
figure(2)
subplot(221);plot(W5/pi,abs(H5))
grid;
axis([0,400,0,1])
xlabel('frequency');ylabel('magnitude of ABPF')
[num4,den4]=bilinear(num3,den3,Fs)
M1=tf(num4,den4)
[H,W3]=freqz(num4,den4)
subplot(222);
plot(W3*Fs/(pi),abs(H))
grid;axis([0,400,0,1])
xlabel('frequency');ylabel('magnitude of DBPF')

```

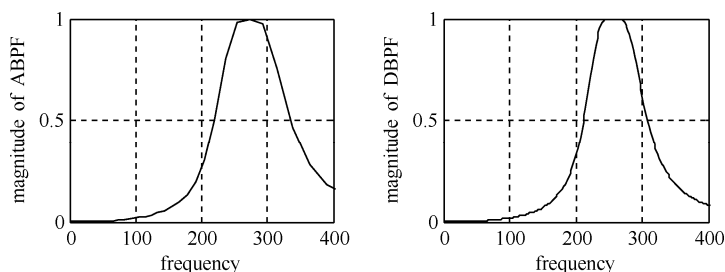


图 5-25 例 5-7 模拟带通和数字带通滤波器的幅频响应曲线

用模拟域频率变换法设计滤波器的步骤和方法小结如下。

- (1) 将数字滤波器指标转换为与数字滤波器同一类型的模拟滤波器指标（频率转换，注意转换公式选取，取决于离散化方法）；
- (2) 将模拟滤波器指标转换成归一化原型模拟低通滤波器指标（模拟域频率变换的频率转换公式）；
- (3) 设计归一化原型模拟低通滤波器（根据两个边界频率和两个衰减指标求归一化原型低通滤波器阶次，并查表）；
- (4) 将归一化原型低通滤波器转换成实际模拟低通滤波器；
- (5) 将实际模拟低通滤波器转换成与数字滤波器同一类型的模拟滤波器（模拟域频率变换的滤波器类型转换公式）；
- (6) 用双线性变换法或冲激响应不变法将模拟滤波器转换为数字滤波器（冲激响应不变法适用于低通和带通）。

5.5.3 模拟低通滤波器转换成 IIR 数字高通滤波器

在模拟滤波器的设计图表中，设计公式都是针对归一化原型模拟低通滤波器的。从设计的原理上讲，通过模拟域频率变换，可以将归一化原型模拟低通滤波器的系统函数变换成要设计的模拟高通、模拟带通和模拟带阻等滤波器的系统函数，再将其离散化成数字滤波器的系统函数（双线性变换法和冲激响应不变法）。通过模拟域频率变换法，由模拟低通滤波器设计数字高通滤波器的步骤如下：

- (1) 将要设计的数字高通滤波器指标转换成模拟高通滤波器指标；

- (2) 将模拟高通滤波器指标转换成相应的归一化低通原型滤波器指标;
 - (3) 设计相应的归一化模拟低通原型滤波器, 求得归一化模拟低通原型滤波器的系统函数;
 - (4) 对实际低通滤波器进行模拟域的频率变换(类型转换), 得到模拟高通滤波器的系统函数;
 - (5) 将模拟高通滤波器的系统函数离散化成相应的所设计的数字高通滤波器的系统函数。
- 设计流程如图 5-26 所示。

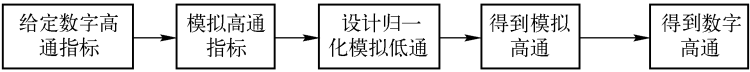


图 5-26 由模拟低通滤波器设计数字高通滤波器的流程

1. 利用模拟域频率变换法, 将归一化模拟原型低通滤波器变换成模拟高通滤波器

① 导出由模拟低通到模拟高通的模拟域频率变换公式

设归一化原型低通滤波器的系统函数为 $H_{aLP}(j\bar{\Omega})$, 模拟高通滤波器的系统函数为 $H_{aHP}(j\Omega)$, 它们的幅度特性表示在图 5-27 中, Ω_p 和 Ω_s 分别是模拟高通的通带和阻带频率, $\bar{\Omega}_p$ 和 $\bar{\Omega}_s$ 分别为归一化原型低通滤波器的通带和阻带频率, 归一化原型滤波器的 $\bar{\Omega}_p = 1$ 。根据两者幅度特性的对应关系, 可以把它们之间的频率对应关系列表格(如表 5-3 所示)。

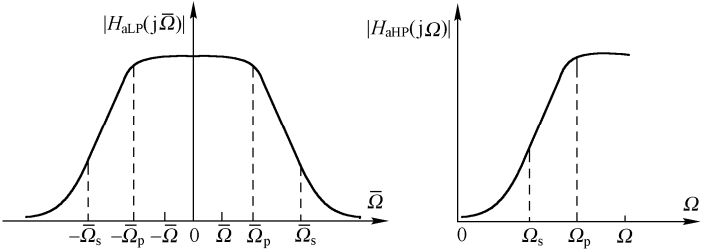


图 5-27 高通与低通之间的频率变换

表 5-3 归一化原型模拟低通与模拟高通频率的对应关系

$\bar{\Omega}$ (低通)	Ω (高通)	$\bar{\Omega}$ (低通)	Ω (高通)
$-\infty$	0	$-\bar{\Omega}_p = -1$	$\Omega_p = 1$
$-\bar{\Omega}_s$	Ω_s	0	∞

根据图 5-27 结合表 5-3, 可以将归一化模拟低通与模拟高通滤波器之间的频率变换公式表示为

$$\bar{\Omega} = -\frac{\Omega_p}{\Omega} \tag{5-42}$$

可见在两者幅度特性相对应的条件下, 两者的频率呈现倒数关系, 且相差一个负号。根据上式, 可以将高通滤波器的频率指标转换为归一化原型低通滤波器的频率指标(两个边界频率转换), 即 $\Omega_p \Rightarrow \bar{\Omega}_p$, $\Omega_s \Rightarrow \bar{\Omega}_s$; 衰减指标不随滤波器类型的改变而改变; $\delta_{aHP} = \delta_{aLP}$ (模拟高通的通、阻衰减与模拟低通的通、阻衰减不变)。

② 设计归一化模拟原型低通滤波器

利用模拟低通的两个边界频率和两个衰减指标, 计算出模拟滤波器的阶数 N , 通过查表得到归一化模拟原型低通滤波器的系统函数 $H_{aLP}(\bar{s})$ 。

③ 将归一化原型低通滤波器的系统函数转换成实际模拟高通滤波器的系统函数

利用模拟域频率变换公式 $\bar{s} = \frac{\Omega_p}{s}$ (将 $j\Omega$ 和 $j\bar{\Omega}$ 分别解析延拓到 s 和 \bar{s} 的全平面, 即令 $j\Omega = s$, $j\bar{\Omega} = \bar{s}$, 并将其代入 $\bar{\Omega} = -\frac{\Omega_p}{\Omega}$ 式中, 得到 $\bar{s} = \frac{\Omega_p}{s}$) 将其代入 $H_{\text{aLP}}(\bar{s})$, 即得实际模拟高通滤波器的系统函数 (包括非归一化)

$$H_{\text{aHP}}(s) = H_{\text{aLP}}(\bar{s}) \Big|_{\bar{s} = \frac{\Omega_p}{s}}$$

2. 将模拟高通系统函数离散化成数字高通滤波器的系统函数

常用的 IIR 数字滤波器设计方法是通过对设计好的模拟滤波器离散化成数字滤波器, 一般有两种方法, 即冲激响应不变法和双线性变换法, 因为冲激响应不变法不适合设计数字高通滤波器和带阻滤波器, 因此在数字高通滤波器的设计过程中, 只能用双线性变换法离散化。

将 $s = c \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ 代入 $H_{\text{aHP}}(s)$, 即得到数字高通滤波器的系统函数

$$H_{\text{dHP}}(z) = H_{\text{aHP}}(s) \Big|_{s = c \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

实际上可以由归一化模拟原型低通滤波器的系统函数, 直接转换成数字高通滤波器的系统函数, 即

$$H_{\text{dHP}}(z) = H_{\text{aHP}}(\bar{s}) \Big|_{\bar{s} = \frac{\Omega_p(1+z^{-1})}{c(1-z^{-1})}}$$

因为 $\bar{s} = \frac{\Omega_p}{s}$, 将 $s = c \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ 代入 $\bar{s} = \frac{\Omega_p}{s}$ 得 $\bar{s} = \frac{\Omega_p}{c \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{\Omega_p(1+z^{-1})}{c(1-z^{-1})}$ 。

【例 5-8】 试设计数字高通滤波器, 通带 3dB 边界频率为 $f_p = 3\text{kHz}$, 通带最大衰减 $\leq 3\text{dB}$, 阻带边界频率 $f_s = 2\text{kHz}$, 阻带最小衰减 $\geq 20\text{dB}$, 抽样频率 $f_c = 10\text{kHz}$, 要求通带、阻带衰减单调递减。

解: 1. 将所要设计的数字高通指标转换为模拟高通指标

① 数字滤波器的频率指标。

$$\omega_p = 2\pi \frac{f_p}{f_c} = \frac{2\pi \times 3 \times 10^3}{10 \times 10^3} = 0.6\pi$$

$$\omega_s = 2\pi \frac{f_s}{f_c} = \frac{2\pi \times 2 \times 10^3}{10 \times 10^3} = 0.4\pi$$

② 转换成模拟高通滤波器的通带边界频率和阻带边界频率, 分别为

$$\Omega_p = c \tan \frac{\omega_p}{2}, \quad \Omega_s = c \tan \frac{\omega_s}{2}$$

其中, 模拟高通的两个边界频率已经预畸变。

2. 将模拟高通滤波器指标转换成归一化原型模拟低通指标 (利用模拟域频率变换公式)

① 归一化模拟原型低通的通带、阻带边界频率分别为

$$\bar{\Omega}_p = 1, \quad \bar{\Omega}_s = \frac{1}{\Omega_s / \Omega_p} = \frac{c \tan(\omega_p / 2)}{c \tan(\omega_s / 2)} = \frac{1.3766}{0.7266} = 1.8945$$

② 通带最大衰减和阻带最小衰减分别为 3dB 和 20dB (滤波器类型转换时, 衰减指标总是保持不变)。

3. 设计巴特沃斯归一化原型模拟低通滤波器 (通带、阻带衰减单调决定), 求出该滤波器的系统函数 $H_{\text{aLP}}(\bar{s})$

① 计算归一化原型模拟低通滤波器的阶数 N , 即

$$N \geq \lg \left[\frac{10^{0.1\delta_s} - 1}{10^{0.1\delta_p} - 1} \right] / 2 \lg \left[\frac{\bar{\Omega}_s}{\bar{\Omega}_p} \right] = \lg \left[\frac{10^{2.0} - 1}{10^{0.3} - 1} \right] / 2 \lg \left[\frac{1.8945}{1} \right] = \frac{1.9977}{0.5550} = 3.5994$$

取 $N = 4$, $\Omega_c = \bar{\Omega}_p = 1$ ($\bar{\Omega}_p$ 为 3dB 频率)。

② 求归一化原型模拟低通滤波器的系统函数。

根据归一化原型模拟低通滤波器的阶数, 查巴特沃斯归一化模拟低通滤波器的设计表, 则有:

$$H_{\text{aLP}}(\bar{s}) = \frac{1}{\bar{s}^4 + 2.6131\bar{s}^3 + 3.4142\bar{s}^2 + 2.6131\bar{s} + 1}$$

4. 将归一化模拟低通的系统函数转换成实际模拟高通滤波器的系统函数 (转换并去归一化处理)

$$\begin{aligned} H_{\text{aHP}}(s) &= H_{\text{aLP}}(\bar{s}) \Big|_{\bar{s}=\frac{\Omega_p}{s}} = \frac{1}{\left(\frac{\Omega_p}{s}\right)^4 + 2.6131\left(\frac{\Omega_p}{s}\right)^3 + 3.4142\left(\frac{\Omega_p}{s}\right)^2 + 2.6131\left(\frac{\Omega_p}{s}\right) + 1} \\ &= \frac{s^4}{\Omega_p^4 + 2.6131\Omega_p^3 s + 3.4142\Omega_p^2 s^2 + 2.6131\Omega_p s^3 + s^4} \end{aligned}$$

5. 将模拟高通滤波器的系统函数离散化成实际设计的数字高通滤波器的系统函数

① 将 $\Omega_p = c \tan(\omega_p / 2) = 1.3765c$ 代入 $H_{\text{aHP}}(s)$, 则有

$$H_{\text{aHP}}(s) = \frac{s^4}{[(1.3765c)^4 + 2.6131 \times (1.3765c)^3 s + 3.4142 \times (1.3765c)^2 s^2 + 2.6131 \times (1.3765c) s^3 + s^4]}$$

② 求所要设计的数字高通滤波器的系统函数 (用双线性变换离散化)。

$$\begin{aligned} H_{\text{dHP}}(z) &= H_{\text{aHP}}(s) \Big|_{s=c \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \\ &= \frac{(1-z^{-1})^4}{\{(1.3765)^4 [(1+z^{-1})]^4 + 2.6131 \times [(1.3765)^3 (1-z^{-1})(1+z^{-1})^3] + \\ &\quad 3.4142 \times [(1.3765)^2 (1-z^{-1})^2 (1+z^{-1})^2] + 2.6131 \times [(1.3765)(1-z^{-1})^3 \\ &\quad \times (1+z^{-1})] + [(1+z^{-1})^4]\}} \end{aligned}$$

6. 仿真程序如下, 仿真结果如图 5-28 所示。

```
wp=0.6*pi;
ws=0.4*pi;
WP=tan(wp/2);
WS=tan(ws/2);
WPP=WP/WS;
WSS=WP/WS;
Rp=3;
Rs=20;
Fs=10^4;
[N,WC]=buttord(WP,WS,Rp,Rs,'s');
[Z,P,K]=buttap(N);
[num3,den3]=zp2tf(Z,P,K);
[H2,W2]=freqs(num3,den3);
subplot(221);plot(W2,abs(H2));grid;
xlabel('frequency');ylabel('magnitude of ALPF');
[A,B,C,D]=zp2ss(Z,P,K);
[AT,BT,CT,DT]=lp2hp(A,B,C,D,WC)
```



```

[num,den]=ss2tf(AT,BT,CT,DT)
[H,W]=freqs(num,den);
subplot(222);plot(W,abs(H));
xlabel('frequency');ylabel('magnitude of AHPF');
grid;
[num2,den2]=bilinear(num,den,1)
[H1,W1]=freqz(num2,den2);
subplot(223);plot(W1,abs(H1));
xlabel('frequency');ylabel('manitude of DHPF');
axis([0,4,0,1.2])
grid;

```

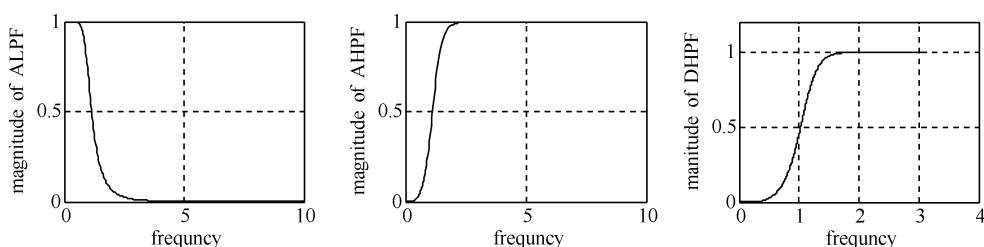


图 5-28 例 5-8 设计数字高通滤波器

5.5.4 模拟低通滤波器转换成 IIR 数字带阻滤波器

利用模拟域的频率变换,将归一化模拟原型低通滤波器转换成模拟带阻滤波器,求归一化原型模拟低通与模拟带阻滤波器之间的转换关系。实际模拟带阻滤波器与归一化原型模拟低通滤波器的幅度特性如图 5-29 所示。

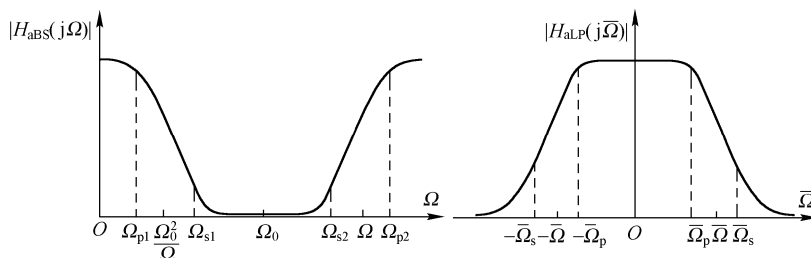


图 5-29 实际模拟带阻滤波器与归一化原型模拟低通滤波器的幅度特性

(1) 模拟带阻滤波器频率指标如下:

Ω_{p1} 和 Ω_{p2} 分别为带阻滤波器通带的下、上限截止频率;

Ω_{s1} 和 Ω_{s2} 分别为带阻滤波器阻带的下、上限截止频率;

$B = \Omega_{p2} - \Omega_{p1}$ 定义为阻带带宽 (通常以 B 为归一化参考频率);

$\Omega_0 = \sqrt{\Omega_{p1}\Omega_{p2}}$ 定义为阻带中心频率 ($\Omega_0^2 = \Omega_{p1}\Omega_{p1}$ 定义几何中心)。

(2) 归一化原型模拟低通频率指标如下:

$\bar{\Omega}_p = 1$ 为通带边界频率;

$\bar{\Omega}_s$ 为阻带边界频率。

根据模拟带阻滤波器与归一化原型模拟低通滤波器的幅度特性对应关系,列出 Ω 与 $\bar{\Omega}$ 的对应关

系, 如表 5-4 所示。

表 5-4 Ω 与 $\bar{\Omega}$ 的对应关系

$\bar{\Omega}$	Ω	$\bar{\Omega}$	Ω	$\bar{\Omega}$	Ω	$\bar{\Omega}$	Ω
$-\infty$	Ω_0	$-\bar{\Omega}_p$	Ω_{p2}	0	0	$\bar{\Omega}_s$	Ω_{s1}
$-\bar{\Omega}_s$	Ω_{s2}	0	$+\infty$	$\bar{\Omega}_p$	Ω_{p1}	∞	Ω_0

可以直接写出 Ω 与 $\bar{\Omega}$ 的关系为

$$\bar{\Omega} = \frac{B\Omega}{\Omega_0^2 - \Omega^2} \quad (5-43)$$

这是因为由模拟低通到模拟带通的转换公式的倒数就是模拟低通到模拟带阻的转换公式, 即 $\bar{s} = \frac{sB}{\Omega_0^2 + s^2}$, 考虑解析延拓的关系, 将式 (5-43) 改写为

$$j\bar{\Omega} = \frac{Bj\Omega}{\Omega_0^2 + j\Omega \times j\Omega} \Rightarrow \bar{s} = \frac{Bs}{\Omega_0^2 + s^2}$$

通过上式可以将带阻滤波器的频率指标转换为归一化原型模拟低通滤波器的频率指标。

① 两个边界频率指标

$$(\Omega_{p1}, \Omega_{p2}) \Rightarrow (\bar{\Omega}_p)$$

$$(\Omega_{s1}, \Omega_{s2}) \Rightarrow (\bar{\Omega}_s)$$

② 两个衰减指标

滤波器类型转换, 通带、阻带衰减总保持不变。

对于归一化原型模拟低通有了两个边界频率和两个衰减指标, 就可以进行模拟低通滤波器的设计了。

由归一化原型模拟低通滤波器设计 IIR 数字带阻滤波器的步骤如下。

(1) 将数字带阻滤波器的频率指标转换成模拟带阻滤波器的频率指标。

(2) 将模拟带阻滤波器指标转换成归一化原型模拟低通滤波器指标。

(3) 设计归一化原型模拟低通滤波器:

① 利用两个边界频率和两个衰减指标计算归一化原型低通滤波器的阶数 N ;

② 根据阶数, 查表, 求出归一化原型模拟低通滤波器的系统函数。

(4) 利用模拟域频率变换公式, 将归一化原型模拟低通滤波器的系统函数转换成实际设计的模拟带阻滤波器的系统函数。转换公式为

$$\bar{s} = \frac{sB}{\Omega_0^2 + s^2} \quad (5-44)$$

利用该公式进行滤波器类型转换 (转换为模拟带阻), 即

$$H_{\text{aBS}}(s) = H_{\text{aLP}}(\bar{s}) \Big|_{\bar{s} = \frac{sB}{\Omega_0^2 + s^2}}$$

(5) 将模拟带阻滤波器离散化成所要设计的数字带阻滤波器的系统函数。

① 将模拟带阻滤波器的系统函数离散化成数字带阻滤波器的系统函数

$$H_{\text{dBS}}(z) = H_{\text{aBS}}(s) \Big|_{s = c \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

注意: 因为设计的是带阻滤波器, 所以只能用双线性变换法离散化。

② 也可将归一化原型模拟低通滤波的系统函数直接转换成数字带阻滤波器的系统函数, 即

$$H_{\text{dBS}}(z) = H_{\text{aLP}}(\bar{s}) \Big|_{\bar{s} = \frac{c(1-z^{-2})B}{c^2(1-z^{-1})^2 + \Omega_0^2(1+z^{-1})^2}}$$

要点十四: $\bar{s} = \frac{sB}{s^2 + \Omega_0^2} = \frac{s(\Omega_{p2} - \Omega_{p1})}{s^2 + \Omega_{p1}\Omega_{p2}} \quad (\text{类型转换公式})$

$$\bar{\Omega} = \frac{\Omega B}{\Omega_0^2 - \Omega^2} \quad (\text{频率转换公式})$$

【例5-9】试设计数字带阻滤波器，要求通带 3dB 对应的边界频率分别为 $f_{p1} = 10\text{kHz}$ ， $f_{p2} = 35\text{kHz}$ ，阻带衰减 $\geq 20\text{dB}$ ，阻带边界频率分别为 $f_{s1} = 18\text{kHz}$ ， $f_{s2} = 25\text{kHz}$ ，抽样频率为 $f_s = 100\text{kHz}$ ，要求通带、阻带衰减单调。

解：1. 将数字带阻滤波器的指标转换为模拟带阻滤波器的指标

① 数字带阻滤波器的频率指标。

$$\omega_{p1} = 2\pi \frac{f_{p1}}{f_s} = \frac{2\pi \times 10 \times 10^3}{100 \times 10^3} = 0.2\pi$$

$$\omega_{p2} = 2\pi \frac{f_{p2}}{f_s} = \frac{2\pi \times 35 \times 10^3}{100 \times 10^3} = 0.7\pi$$

$$\omega_{s1} = 2\pi \frac{f_{s1}}{f_s} = \frac{2\pi \times 18 \times 10^3}{100 \times 10^3} = 0.36\pi$$

$$\omega_{s2} = 2\pi \frac{f_{s2}}{f_s} = \frac{2\pi \times 25 \times 10^3}{100 \times 10^3} = 0.5\pi$$

② 衰减指标。

衰减指标保持不变（通带、阻带衰减分别为 3dB 和 20dB）。

③ 转换为模拟带阻滤波器的通带、阻带边界频率分别为

$$\Omega_{p1} = c \tan \frac{\omega_{p1}}{2}, \quad \Omega_{p2} = c \tan \frac{\omega_{p2}}{2}$$

$$\Omega_{s1} = c \tan \frac{\omega_{s1}}{2}, \quad \Omega_{s2} = c \tan \frac{\omega_{s2}}{2}$$

④ 利用模拟频率域变换公式，将模拟带阻滤波器的频率指标转换成归一化原型模拟低通滤波器的频率指标。对应于带阻滤波器的归一化原型模拟低通滤波器的通带指标，即

$$\bar{\Omega}_{p1} = \frac{\Omega B}{\Omega_0^2 - \Omega^2} \Big|_{\Omega = \Omega_{p1}} = \frac{\Omega_{p1}(\Omega_{p2} - \Omega_{p1})}{\Omega_{p1}(\Omega_{p2} - \Omega_{p1})} = 1$$

$$\bar{\Omega}_{p2} = \frac{\Omega B}{\Omega_0^2 - \Omega^2} \Big|_{\Omega = \Omega_{p2}} = \frac{\Omega_{p2}(\Omega_{p2} - \Omega_{p1})}{\Omega_{p1}\Omega_{p2} - \Omega_{p2}^2} = -1$$

归一化原型模拟低通滤波器通带边界频率取 $\bar{\Omega}_p = 1$ ，通带最大衰减为 3dB。

类似地，可以写出归一化原型模拟低通滤波器的阻带边界频率，即

$$\bar{\Omega}_{s1} = \frac{\Omega B}{\Omega_0^2 - \Omega^2} \Big|_{\Omega = \Omega_{s1}} = \frac{\Omega_{s1}(\Omega_{p2} - \Omega_{p1})}{\Omega_{p1}\Omega_{p2} - \Omega_{s1}^2} = \frac{\tan \frac{\omega_{s1}}{2} \left(\tan \frac{\omega_{p2}}{2} - \tan \frac{\omega_{p1}}{2} \right)}{\tan \frac{\omega_{p1}}{2} \tan \frac{\omega_{p2}}{2} - \tan^2 \frac{\omega_{s1}}{2}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\tan 0.18\pi(\tan 0.35\pi - \tan 0.1\pi)}{\tan 0.35\pi \tan 0.1\pi - \tan^2 0.18\pi} = 4.4237 \\
\bar{\Omega}_{s2} &= \frac{\Omega B}{\Omega_0^2 - \Omega^2} \Big|_{\Omega=\Omega_{s2}} = \frac{\Omega_{s2}(\Omega_{p2} - \Omega_{p1})}{\Omega_{p1}\Omega_{p2} - \Omega_{s2}^2} = \frac{\tan \frac{\omega_{s2}}{2} \left(\tan \frac{\omega_{p2}}{2} - \tan \frac{\omega_{p1}}{2} \right)}{\tan \frac{\omega_{p1}}{2} \tan \frac{\omega_{p2}}{2} - \tan^2 \frac{\omega_{s2}}{2}} \\
&= -4.5201
\end{aligned}$$

考虑要保证满足阻带衰减指标, 则阻带边界频率的选取原则为

$$\bar{\Omega}_s = \min(|\bar{\Omega}_{s1}|, |\bar{\Omega}_{s2}|) = 4.4237$$

阻带边界频率取小原则, 取若较小的频率处满足衰减要求, 则较大频率处一定满足衰减要求。保证可靠满足阻带衰减要求。

2. 设计巴特沃斯归一化原型低通滤波器系统函数 $H_{\text{aLP}}(\bar{s})$

① 根据两个边界频率和两个衰减计算滤波器的阶数 N 。

$$\begin{aligned}
N &\geq \lg \left[\frac{10^{0.1\delta_s} - 1}{10^{0.1\delta_p} - 1} \right] / 2 \lg \left[\frac{\bar{\Omega}_s}{\bar{\Omega}_p} \right] = \lg \left[\frac{10^{2.0} - 1}{10^{0.3} - 1} \right] / 2 \lg \left[\frac{4.4237}{1} \right] \\
&= \frac{1.9977}{1.292} = 1.5467
\end{aligned}$$

取 $N = 2$, $\Omega_c = \bar{\Omega}_p = 1$, 对应 3dB 衰减。

② 根据 N 值查表, 可得归一化原型模拟低通滤波器的系统函数, 即

$$H_{\text{aLP}}(\bar{s}) = \frac{1}{\bar{s}^2 + \sqrt{2}\bar{s} + 1}$$

3. 通过模拟域频率变换将归一化原型模拟低通滤波器的系统函数转换成与所要设计的数字滤波器同型的模拟带阻滤波器的系统函数

$$\begin{aligned}
H_{\text{aBS}}(s) &= H_{\text{aLP}}(\bar{s}) \Big|_{\bar{s} = \frac{sB}{\Omega_0^2 + s^2}} = \frac{1}{\bar{s}^2 + \sqrt{2}\bar{s} + 1} \Big|_{\bar{s} = \frac{sB}{\Omega_0^2 + s^2}} \\
&= \frac{1}{\left(\frac{sB}{\Omega_0^2 + s^2} \right)^2 + \sqrt{2} \frac{sB}{\Omega_0^2 + s^2} + 1} = \frac{(\Omega_0^2 + s^2)^2}{(sB)^2 + \sqrt{2}sB(\Omega_0^2 + s^2) + (\Omega_0^2 + s^2)^2}
\end{aligned}$$

4. 将模拟带阻滤波器的系统函数转换成所要设计的数字带阻滤波器的系统函数

① 利用双线性法, 将模拟带阻滤波器的系统函数转化成数字带通滤波器的系统函数

$$H_{\text{dBS}}(z) = H_{\text{aBS}}(s) \Big|_{s=c \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

② 也可由归一化原型模拟低通滤波器直接转换成数字带阻滤波器的系统函数

$$H_{\text{dBS}}(z) = H_{\text{aLP}}(\bar{s}) \Big|_{\bar{s} = \frac{c(1-z^{-2})B}{c^2(1-z^{-1})^2 + \Omega_0^2(1+z^{-1})^2}}$$

5. 仿真程序如下, 仿真结果如图 5-30 所示。

```

wp1=0.2*pi;
wp2=0.7*pi;
ws1=0.36*pi;
ws2=0.5*pi;
Rp=3;
Rs=20;

```

```

Fs=100000;
Wp=1;
Ws10=(tan(0.18*pi)*(tan(0.35*pi)-tan(0.1*pi)))
Ws11=(tan(0.35*pi)*tan(0.1*pi)-(tan(0.18*pi))^2)
Ws0=Ws10/Ws11
Ws20=(tan(0.25*pi)*(tan(0.35*pi)-tan(0.1*pi)))
Ws21=(tan(0.35*pi)*tan(0.1*pi)-(tan(0.25*pi))^2)
Ws01=Ws20/Ws21
Ws3=min(abs(Ws0),abs(Ws01))
[N,fc]=buttord(Wp,Ws3,Rp,Rs,'s');
[B,A]=butter(N,fc,'s');
[hf,f]=freqs(B,A,1024)
figure(1)
subplot(221);plot(f,abs(hf))
grid;
xlabel('frequency');
ylabel('magnitude of ALPF ');
W0=sqrt(tan(0.1*pi)*tan(0.35*pi))
Bw=tan(0.35*pi)-tan(0.1*pi)
[Bbs,Abs]=lp2bs(B,A,W0*100000,Bw*100000)
[Bbsd,Absd]=bilinear(Bbs,Abs,Fs)
[hfd,fcl]=freqz(Bbsd,Absd,1024);
subplot(222);plot(fcl*Fs/2*pi,abs(hfd));
grid;axis
xlabel('frequency');
ylabel('magnitude of DBEF ')

```

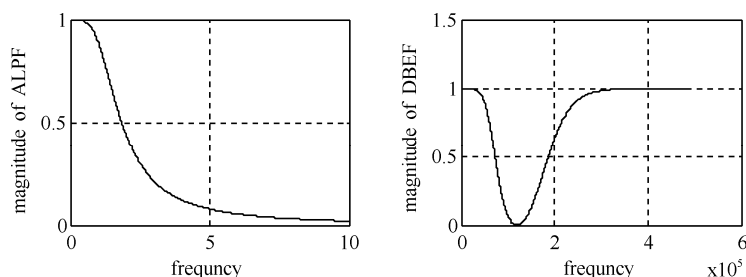


图 5-30 例 5-9 数字带阻滤波器设计

总结模拟域频率变换法设计 IIR 数字滤波器（数字低通、高通、带通和带阻）的步骤如下：

- (1) 数字滤波器指标转换为与数字滤波器同一类型的模拟滤波器指标（频率转换，注意转换公式的选取，取决于离散化方法）；
- (2) 将模拟滤波器的指标转换成归一化原型模拟低通滤波器的指标（模拟域频率变换法，指标转换公式）；
- (3) 设计归一化原型模拟低通滤波器（根据两个边界频率和两个衰减指标求归一化原型低通滤波器阶次，并查表）；
- (4) 将归一化原型低通滤波器转换成实际模拟低通滤波器；
- (5) 将实际模拟低通滤波器转换成与数字滤波器同一类型的模拟滤波器（用模拟域频率变换法，滤波器类型转换公式）；
- (6) 用双线性变换法或用冲激响应不变法转换模拟滤波器的系统函数为数字滤波器的系统函数。

从模拟带通滤波器转换到数字带通滤波器,有两种离散化方法:冲激响应不变法与双线性变换法。两种方法各有特点,但离散化时用双线性法简单,只需代入双线性变换公式即可;用冲激响应不变法,离散化时需要求 Z 变换,当模拟滤波器(带通、带阻和高通)阶数高时,就比较麻烦。另外冲激响应不变法限于实现低通和带通滤波器。双线性法不受这限制,不存在频率混叠,但是双线性法模拟频率与数字频率呈非线性,这一点是需要注意的,一般需要根据要求选择变换公式中的常数 c ,预防频率畸变。

我们已经讨论了通过模拟域频率变换法设计 IIR 数字滤波器,这种方法是将希望设计的数字滤波器的指标转换成与数字滤波器同一类型的模拟滤波器的指标,然后再转换成归一化原型模拟低通滤波器的指标,设计归一化模拟低通滤波器,通过模拟域的频率变换转换成与数字滤波器同一类型的模拟滤波器,最后用离散化的方法将模拟滤波器的系统函数转换成希望设计的数字滤波器的系统函数。简单概括,就是将希望设计的数字滤波器指标,一律转成归一化原型模拟低通滤波器的指标,设计归一化原型模拟低通,再用模拟域频率变换法的类型转换公式将归一化原型模拟低通滤波器转换成与希望设计的数字滤波器同一类型的模拟滤波器,最后用离散化的方法转化成希望设计的数字滤波器。上述过程主要处理如下问题。

- ① 模拟频率到模拟频率变换(将解析延拓后获得的公式,用于模拟滤波器之间的类型转换)。
- ② 离散化处理(包括双线性变换法、冲激响应不变法(限于低通和带通))。
- ③ 频率指标转换(数字 \rightarrow 模拟,选用公式取决于离散化方法;模拟滤波器不同类型之间的指标转换,取决于模拟域频率变换的指标转换公式(用解析延拓前的公式))。

IIR 数字滤波器的数字 \rightarrow 数字频率法设计(数字域频率变换法设计),实现步骤与前者有所不同。具体而言,就是将给定某一类型的数字滤波器的性能指标转换成与数字滤波器同一类型的模拟滤波器的性能指标(取决于离散化方法),再通过模拟域频率变换公式(用解析延拓前的公式)将模拟滤波器的频率指标转换为归一化模拟低通滤波器的频率指标,衰减指标不变。根据模拟低通滤波器的性能指标设计归一化模拟低通滤波的系统函数(在此之前两者设计步骤相同),将此系统函数离散化成数字低通滤波器的系统函数(双线性变换法、冲激响应不变法),通过数字域频率变换将数字低通滤波器的系统函数转换成希望的数字滤波器的系统函数(两者设计步骤的不同之处在于,由数字低通通过不同的数字域频率变换公式可直接设计各类 IIR 数字滤波器,需要指出,这类滤波器的设计也涉及模拟频率 \rightarrow 模拟频率变换和两种离散化方法,所谓数字频率 \rightarrow 数字频率变换法,是强调只要得到了数字低通,就可以由它直接通过数字域频率变换得到各类希望设计的数字滤波器)。

本节的重点给出由数字低通滤波器转换成各类数字滤波器的数字域频率变换关系,并通过举例讲述数字域频率变换法设计 IIR 数字滤波器的具体步骤和方法。

5.5.5 数字域的频率变换法设计

数字域的频率变换法的设计步骤如图 5-31 所示。

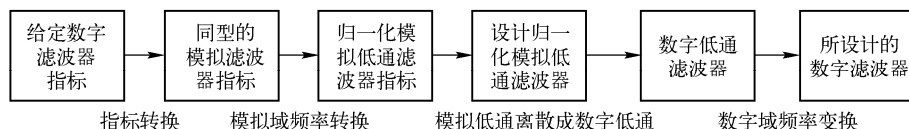


图 5-31 数字域的频率变换法的设计步骤

由 IIR 数字滤波器数字域频率变换设计步骤可知,显然从指标转换到归一化低通滤波器设计过程是我们熟悉的内容,不再赘述。由数字低通滤波器通过数字域的频率变换方法设计 IIR 数字高通、带通和带阻滤波器则是本节的重点(也可以由数字低通滤波器设计数字低通滤波器)。

由 IIR 数字低通滤波器, 通过数字域的频率变换方法设计数字高通、带通和带阻滤波器的步骤如下:

- (1) 由给定的数字高通、带通和带阻滤波器的性能指标转换成与数字滤波器同一类型的模拟滤波器的指标 (利用双线性变换法的频率转换公式或冲激响应不变法频率转换公式);
- (2) 将模拟滤波器的指标转换成归一化原型模拟低通滤波器的指标;
- (3) 设计归一化模拟低通滤波器;
- (4) 将归一化模拟低通滤波器的系统函数离散化成与之相应数字低通滤波器的系统函数;
- (5) 利用数字域的频率变换公式, 将数字低通滤波器的系统函数转换各类数字滤波器 (包括数字高通、带通和带阻滤波器) 的系统函数 $H(z)$ 。

从设计步骤看, 如果数字低通的系统函数已知为 $H_{\text{dLP}}(\bar{z})$, 则步骤 (1) ~ (4) 可略过, 直接按照步骤 (5) 进行数字域的频率变换, 就可以完成数字滤波器的设计。

设已知原型低通数字滤波器的系统函数为 $H_{\text{dLP}}(\bar{z})$, 所要设计的数字滤波器的系统函数为 $H(z)$, 这里两者所用的频率变量分别为 \bar{z} 和 z , 为了由 $H_{\text{dLP}}(\bar{z})$ 通过数字域的频率变换求出 $H(z)$, 需要定义两平面之间的变换, 即

$$\bar{z}^{-1} = G(z^{-1}) \quad (5-45)$$

则有下列关系

$$H(z) = H_{\text{dLP}}(\bar{z}) \Big|_{\bar{z}^{-1}=G(z^{-1})}$$

原型低通数字滤波器应是一个因果稳定系统 (因果性保证系统的可实现, 稳定性保证系统的可靠性和可用性), 要求设计的数字滤波器 $H(z)$ 必须是一个因果稳定的系统, 因此要求 $\bar{z}^{-1} = G(z^{-1})$ 变换满足如下条件:

- (1) $G(\cdot)$ 必须是关于 z^{-1} 的有理函数, 保证 $H(z)$ 是可实现的;
- (2) \bar{z} 平面的单位圆必须映射到 z 平面的单位圆 (稳定性要求);
- (3) \bar{z} 平面的单位圆内必须映射到 z 平面的单位圆内 (稳定性要求)。

下面考虑频率响应, 设 ω' 和 ω 分别是 \bar{z} 平面和 z 平面的频率变量, 即

$$\bar{z} = e^{j\omega'} \text{ 和 } z = e^{j\omega}$$

它们各自在单位圆上, 由条件 (2) 和 (3) 则有

$$e^{-j\omega'} = G(e^{-j\omega}) = |G(e^{-j\omega})| e^{j\arg[G(e^{-j\omega})]}$$

这就要求 $G(e^{-j\omega})$ 的幅度响应和相位响应满足

$$|G(e^{-j\omega})| = 1, \quad (\text{因为 } |e^{-j\omega'}| = 1), \quad \omega' = -\arg[G(e^{-j\omega})]$$

由此可见, 对于任意频率 ω , $G(e^{-j\omega})$ 在单位圆上的幅值必为 1, 这样的幅度函数称为全通函数, 频带变换函数 $\bar{z}^{-1} = G(z^{-1})$ 可以表示为全通滤波器的系统函数, 即

$$\bar{z}^{-1} = G(z^{-1}) = \pm \prod_{i=1}^N \frac{z^{-1} - a_i^*}{1 - a_i z^{-1}} \quad (5-46)$$

式中, a_i 为变换函数 $G(z^{-1})$ 的极点, 可以是实数, 也可以为共轭复数, 但是必须保证极点在单位圆内, 即 $|a_i| < 1$, 以保证变换不会改变稳定性, 可以证明 $|\bar{z}| = 1$ 的点, 则 $|z| = 1$ 也一定成立; 同样 $|\bar{z}| < 1$ 的点, 则 $|z| < 1$ 也一定成立, 显然 $G(z^{-1})$ 的所有零点都是其极点的共轭倒数 $\left| \frac{1}{a_i} \right|$ ($z = [1/z_i]^*$ 为零点, $z = z_i$ 为极点), N 是全通函数的阶数, 当 ω 从 0 到 π 变化时, 则全通函数的相角 $\arg[G(e^{-j\omega})]$ 在 $0 \sim N\pi$ 的范围变化 ($\sum_{i=1}^N (\angle(z^{-1} - a_i^*) - \angle(1 - a_i z^{-1}))$ 在 $N\pi$ 范围内变化)。选择合适的 N 和 a_i , 就可以获得各种不同类型的数字滤波器。

表 5-5 所示为由原型低通数字滤波器到数字低通、高通、带通和带阻滤波器的数字域频率变换公式（数字频率→数字频率变换）。

表 5-5 原型低通数字滤波器到数字低通、高通、带通和带阻滤波器的变换公式

低通→各类数字滤波器	变换公式（映射关系）	映射参数计算
低通→低通	$\bar{z}^{-1} = \frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}} \text{ 或}$ $\bar{z} = \frac{z - a}{1 - az}$	$a = \frac{\sin[(\omega'_c - \omega_c)/2]}{\sin[(\omega'_c + \omega_c)/2]}$ ω_c 为所要设计的滤波器的通带截止频率， ω'_c 为低通数字滤波器的通带截止频率
低通→高通	$\bar{z}^{-1} = -\frac{z^{-1} + a}{1 + az^{-1}} \text{ 或 } \bar{z} = -\frac{z + a}{1 + az}$	$a = -\frac{\cos[(\omega'_c + \omega_c)/2]}{\cos[(\omega'_c - \omega_c)/2]}$ ω_c 为所要设计的高通滤波器的通带截止频率， ω'_c 为低通数字滤波器的通带截止频率
低通→带通	$\bar{z}^{-1} = -\frac{z^{-2} - \frac{2ak}{k+1}z^{-1} + \frac{k-1}{k+1}}{\frac{k-1}{k+1}z^{-2} - \frac{2ak}{k+1}z^{-1} + 1} \text{ 或}$ $\bar{z} = -\frac{\frac{k-1}{k+1} - \frac{2ak}{k+1}z + z^2}{1 - \frac{2ak}{k+1}z + \frac{k-1}{k+1}z^2}$	$a = \frac{\cos[(\omega_2 + \omega_1)/2]}{\cos[(\omega_2 - \omega_1)/2]}$ $k = \cot\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right) \tan \frac{\omega'_c}{2}$ ω_2 、 ω_1 为所要设计的带通滤波器的上、下限截止频率
低通→带阻	$\bar{z}^{-1} = \frac{z^{-2} - \frac{2a}{k+1}z^{-1} + \frac{1-k}{k+1}}{\frac{k-1}{k+1}z^{-2} - \frac{2a}{k+1}z^{-1} + 1} \text{ 或}$ $\bar{z} = \frac{\frac{1-k}{k+1} - \frac{2a}{k+1}z + z^2}{1 - \frac{2a}{k+1}z + \frac{1-k}{k+1}z^2}$	$a = \frac{\cos[(\omega_2 + \omega_1)/2]}{\cos[(\omega_2 - \omega_1)/2]}$ $k = \tan\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right) \tan \frac{\omega'_c}{2}$ ω_2 、 ω_1 为所要设计的带阻滤波器的上、下限截止频率

表 5-5 所示为由通带频率为 ω'_c 的低通数字滤波器变换成各类数字滤波器变换公式和映射参数的计算公式。公式的具体推导本节不再给出。通过例题介绍这类问题的处理步骤和方法。

【例 5-10】 设计一个 2 阶数字高通滤波器，要求通带截止频率为 $f_c = 3\text{kHz}$ ，通带、阻带衰减单调递减，抽样频率为 $f_s = 12\text{kHz}$ 。

解：1. 由给定条件求出数字低通滤波器。

本例题预先给定设计 2 阶高通数字滤波器，这使得设计过程相对简化，即模拟低通的阶数不需再求，直接按 2 阶模拟低通设计。但是模拟低通的通带截止频率需要求出。

对于原型低通模拟滤波器和数字滤波器的通带截止频率，可任意设定它们中的一个截止频率，设定原则是尽可能地使数字低通到数字高通的变换公式简化。另一个截止频率则按照双线性变换的频率来确定。

① 原型低通数字滤波器到数字高通的变换公式中参数 a 的确定（尽可能简化）。

原型低通滤波器到高通滤波器的变换公式为

$$\bar{z}^{-1} = -\frac{z^{-1} + a}{1 + az^{-1}}$$

可以选择适当的频率，代入原型低通滤波器到高通滤波器的转换的参数公式，使得 $a = 0$ （这就可以简化数字低通到数字高通的变换公式），即 $(\omega'_c + \omega_c) = \pi \Rightarrow a = -\frac{\cos[(\omega'_c + \omega_c)/2]}{\cos[(\omega'_c - \omega_c)/2]} = 0$ ，则有 $\bar{z}^{-1} = -z^{-1}$ ，使得数字低通变换成数字高通相对容易。

② 确定模拟低通的通带边界频率。

根据题目给定数字高通通带边界, 可以确定数字低通的通带边界频率

$$(\omega'_c + \omega_c) = \pi \Rightarrow \omega'_c = \pi - \omega_c = \pi - 2\pi \times \frac{f_c}{f_s} = \pi - \frac{2\pi \times 3}{12} = \frac{\pi}{2}$$

将数字低通通带截止频率 $\omega'_c = \pi/2$ 代入双线性变换公式, 可得模拟低通滤波器的通带截止频率为

$$\bar{\Omega}_c = \tan\left(\frac{\omega'_c}{2}\right) = 1 \quad (\text{取 } c=1)。$$

③ 设计归一化模拟低通滤波器。

已知模拟低通阶数 $N=2$, 又计算出模拟低通滤波器的通带截止频率(归一化频率), 可以设计归一化原型模拟巴特沃斯低通滤波器(要求通、阻带衰减单调)。

查表得 2 阶归一化原型模拟巴特沃斯低通滤波器的系统函数为

$$H_{\text{aLP}}(\bar{s}) = \frac{1}{\bar{s}^2 + \sqrt{2}\bar{s} + 1}$$

④ 非归一化, 得到实际模拟低通滤波器的系统函数 $\bar{s} = \frac{s}{\bar{\Omega}_c}$ 代入上式, 则有

$$H_{\text{aLP}}\left(\frac{s}{\bar{\Omega}_c}\right) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\bar{\Omega}_c}\right)^2 + \sqrt{2}\left(\frac{s}{\bar{\Omega}_c}\right) + 1} = \frac{\bar{\Omega}_c^2}{s^2 + \sqrt{2}s\bar{\Omega}_c + \bar{\Omega}_c^2}$$

则实际的模拟低通滤波器的系统函数为

$$H_{\text{aLP}}(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

这是因为模拟低通归一化参考频率 $\bar{\Omega}_c = 1$, 因此归一化原型模拟低通滤波器与实际模拟低通滤波器的系统函数相等。

⑤ 由归一化模拟低通求数字低通滤波器的系统函数。

将模拟低通系统函数离散化为数字低通滤波器的系统函数

$$H_{\text{dLP}}(\bar{z}) = H_{\text{aLP}}(s) \Big|_{s=\frac{1-\bar{z}^{-1}}{1+\bar{z}^{-1}}} = \frac{(1+\bar{z}^{-1})^2}{(1-\bar{z}^{-1})^2 + \sqrt{2}(1-\bar{z}^{-2}) + (1+\bar{z}^{-1})^2}$$

2. 通过数字域频率变换法, 将数字低通滤波器的系统函数变换成要设计的数字高通滤波器的系统函数。

将数字低通系统函数通过数字→数字频率变换公式转换成数字高通滤波器的系统函数, 转换的结果为

$$\begin{aligned} H_{\text{dHP}}(z) &= H_{\text{dLP}}(\bar{z}) \Big|_{\bar{z}^{-1}=-z^{-1}} = \frac{(1-z^{-1})^2}{(1+z^{-1})^2 + \sqrt{2}(1-z^{-2}) + (1-z^{-1})^2} \\ &= \frac{z^2 - 2z + 1}{(\sqrt{2}+2)z^2 + (2-\sqrt{2})} \end{aligned}$$

3. 仿真程序如下, 仿真结果如图 5-32 所示。

```
num=1;
den=[1,sqrt(2),1];Fs=2*pi
[H1,W1]=freqs(num,den,'s');
figure(1)
subplot(221);
plot(W1,abs(H1));grid on;
```

```

xlabel('frequency');ylabel(' magnitude of ALPF');
num3=[1,-2,1];
den3=[2+sqrt(2),0,2-sqrt(2)];
[H3,W3]=freqz(num3,den3);
subplot(222);plot(W3,abs(H3));
grid on;
xlabel('frequency');ylabel(' magnitude of DHPF');

```

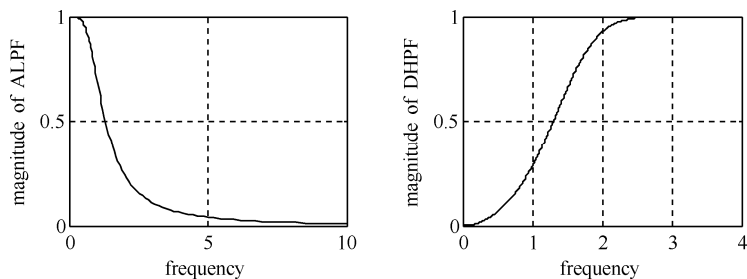


图 5-32 数字域频率变换法设计数字高通滤波器

显然可见, 模拟频率 \rightarrow 模拟频率变换法与数字频率 \rightarrow 数字频率变换法设计 IIR 数字滤波器, 由模拟低通滤波器向所要设计的数字滤波器转换时, 两者的处理方式不同。前者由模拟低通滤波器转换成与所要设计的数字滤波器同一类型的模拟滤波器, 再将此滤波器离散化成所要设计的数字滤波器(最后一步是离散化处理)。后者为模拟低通 \rightarrow 数字低通滤波器(这一步是离散化处理) \rightarrow 所要设计的数字滤波器(最后一步是数字域频率变换)。

【例 5-11】 给定数字低通滤波器的系统函数为 $H_{\text{dLP}}(\bar{z}) = \frac{0.1277 + 0.02555\bar{z}^{-1} + 0.1277\bar{z}^{-2}}{1 - 0.7664\bar{z}^{-1} + 0.2774\bar{z}^{-2}}$, 试设计如下数字滤波器。

1. 数字低通通带截止频率 $\omega'_c = 0.4\pi$, 求通带截止频率 $\omega_c = 0.6\pi$ 的数字高通滤波器。

2. 数字低通通带截止频率 $\omega'_c = 0.2\pi$, 求通带截止频率 $\omega_c = 0.4\pi$ 的数字高通滤波器。

解: 1. 对于数字低通通带截止频率 $\omega'_c = 0.4\pi$, 求通带截止频率 $\omega_c = 0.6\pi$ 的数字高通滤波器。

① 求数字低通到高通的变换公式中的参数 a 的值。

本题由给定的数字低通, 通过数字域频率变换公式直接转换成数字高通滤波器, 数字低通到数字高通频率变换公式为

$$\bar{z}^{-1} = -\frac{z^{-1} + a}{1 + az^{-1}}$$

其中参数 a 必须先计算出, 参数计算式为

$$a = -\frac{\cos[(\omega'_c + \omega_c)/2]}{\cos[(\omega'_c - \omega_c)/2]}$$

其中, ω_c 为所要设计的高通滤波器的通带截止频率, 将 $\omega'_c = 0.4\pi$ 和 $\omega_c = 0.6\pi$ 代入上式, 则有

$$a = -\frac{\cos[(0.4\pi + 0.6\pi)/2]}{\cos[(0.2\pi - 0.4\pi)/2]} = 0$$

② 将数字域频率变换公式代入数字低通, 求出要求的数字高通滤波器的系统函数。

$a=0$, 再将其代入数字低通到数字高通的数字域频率变换公式, 则有

$$\bar{z}^{-1} = -\frac{z^{-1} + 0}{1 + 0z^{-1}} = -z^{-1}$$

$$H_{\text{dHP}}(z) = H_{\text{dLP}}(\bar{z}) \Big|_{\bar{z}^{-1} = -z^{-1}} = \frac{0.1277 + 0.02555\bar{z}^{-1} + 0.1277\bar{z}^{-2}}{1 - 0.7664\bar{z}^{-1} + 0.2774\bar{z}^{-2}} \Big|_{\bar{z}^{-1} = -z^{-1}}$$

2. 数字低通带截止频率 $\omega'_c = 0.2\pi$, 求通带截止频率 $\omega_c = 0.4\pi$ 的数字高通滤波器。

① 求数字低通到高通的变换公式中的参数 a 的值。

本题由给定的数字低通通过数字域频率变换公式直接转换成数字高通滤波器, 数字低通到数字高通的频率变换公式为

$$\bar{z}^{-1} = -\frac{z^{-1} + a}{1 + az^{-1}}$$

其中参数 a 必须先计算出, 参数计算式为

$$a = -\frac{\cos[(\omega'_c + \omega_c)/2]}{\cos[(\omega'_c - \omega_c)/2]}$$

其中, ω_c 为所要设计的高通滤波器的通带截止频率, 将 $\omega'_c = 0.2\pi$ 和 $\omega_c = 0.4\pi$ 代入上式, 则有

$$a = -\frac{\cos[(0.2\pi + 0.4\pi)/2]}{\cos[(0.2\pi - 0.4\pi)/2]} = -0.6180$$

② 将数字域频率变换公式代入数字低通, 求出要求的数字高通滤波器的系统函数 $a = -0.6180$, 再将其代入数字低通到数字高通的数字域频率变换公式, 则有

$$H_{\text{dHP}}(z) = H_{\text{dLP}}(\bar{z}) \Big|_{\bar{z}^{-1} = -\frac{z^{-1} - 0.6180}{1 - 0.6180z^{-1}}} = \frac{0.1277 + 0.02555\bar{z}^{-1} + 0.1277\bar{z}^{-2}}{1 - 0.7664\bar{z}^{-1} + 0.2774\bar{z}^{-2}} \Big|_{\bar{z}^{-1} = -\frac{z^{-1} - 0.6180}{1 - 0.6180z^{-1}}}$$

3. 仿真程序如下, 仿真结果如图 5-33 和图 5-34 所示。

```
wcdlp1=0.4*pi;
wcdhp1=0.6*pi;
num=[0.1277,0.2555,0.1277];
den=[1,-0.7664,0.2774]
a=-cos((wcdlp1+wcdhp1)/2)/cos((wcdlp1-wcdhp1)/1)
Nz=-[a,1];
Dz=[1,a];
[bhp,ahp]=zmapping(num,den,Nz,Dz)
[Hlp,wlp]=freqz(num,den);
subplot(221);plot(wlp,abs(Hlp));grid;
xlabel('frequency');ylabel('magnitude of DLPF')
[Hhp,whp]=freqz(bhp,ahp)
subplot(222);plot(whp,abs(Hhp));grid;
xlabel('frequency');ylabel('magnitude of DHPF wc=0.6\pi')
```

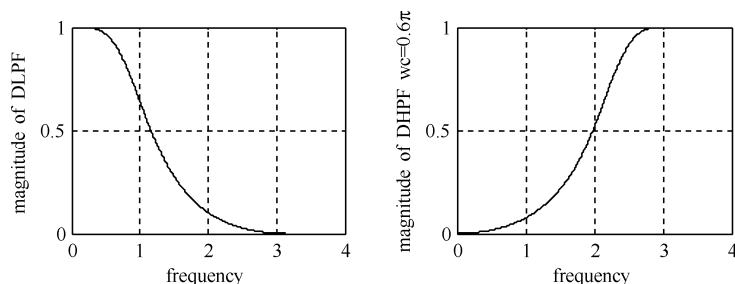


图 5-33 用数字域频率变换设计数字高通滤波器 $\omega_c = 0.6\pi$

```

wcdlp2=0.2*pi;
wcdhp2=0.4*pi;
num=[0.1277,0.2555,0.1277];
den=[1,-0.7664,0.2774]
a=-cos((wcdlp2+wcdhp2)/2)/cos((wcdlp2-wcdhp2)/1)
Nz=[a,1];
Dz=[1,a];
[bhp,ahp]=zmapping(num,den,Nz,Dz)
[Hlp,wlp]=freqz(num,den);
subplot(221);plot(wlp,abs(Hlp));grid;
xlabel('frequency');ylabel('magnitude of DLPF')
[Hhp,whp]=freqz(bhp,ahp)
subplot(222);plot(whp,abs(Hhp));grid;
xlabel('frequency');ylabel('magnitude of DHPF wc=0.4π')

```

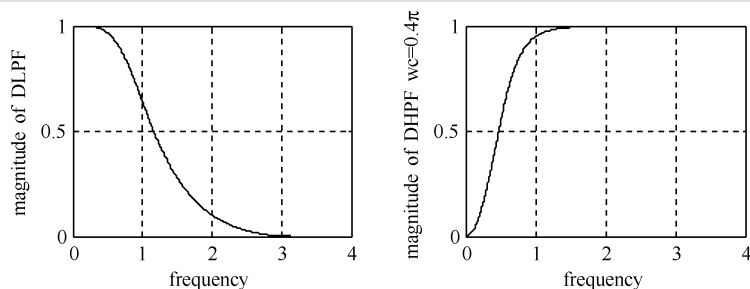


图 5-34 用数字域频率变换设计数字高通滤波器 $\omega_c=0.4\pi$

```

function[bz,az] = zmapping(bZ,aZ,Nz,Dz)
bzord = (length(bZ)-1)*(length(Nz)-1)
azord = (length(aZ)-1)*(length(Dz)-1)
bz= zeros(1,bzord+1)
for k = 0: bzord
    pln = [1]
    for l= 0:k-1
        pln = conv(pln,Nz)
    end
    pld = [1];
    for l = 0: bzord-k-1
        pld = conv(pld,Dz)
    end

    bz= bz+bZ(k+1)*conv(pln,pld)
end

az = zeros(1,azord+1)
for k = 0:azord
    pln = [1];
    for l= 0:k-1
        pln = conv(pln,Nz)
    end
    pld = [1];
    for l = 0: azord-k-1
        pld = conv(pld,Dz)
    end
    az= az+aZ(k+1)*conv(pln,pld)
end
az1 = az(1);az= az/az1; bz=bz/az1;

```

注: 本题的仿真均要调用 $\text{function}[bz,az] = \text{zmapping}(bZ,aZ,Nz,Dz)$ 。

从解题过程可见, 只要将给定的数字低通的通带截止频率 $\omega'_c = 0.2\pi$ 和所要设计的高通滤波器的通带截止频率 $\omega_c = 0.4\pi$ 代入参数 a 的计算公式, 再将 a 的计算值代入数字频率变换公式, 把此公式代入数字低通的系统函数, 将 $H_{\text{dLP}}(\bar{z})$ 中的 \bar{z} 用 $\frac{z-0.6180}{1-0.6180z}$ 代替, 即可得到数字高通滤波器的系统函数 $H_{\text{dHP}}(z)$ 。所以当数字低通滤波器系统函数给定时, 求各种类型的 IIR 数字滤波器, 就是将对应数字域频率变换公式代入数字低通, 便可以得到所要设计的数字滤波器。注意尽可能使转换公式简化 (参考例 5-10)。

【例 5-12】 给定数字低通的系统函数为 $H_{\text{dLP}}(\bar{z}) = \frac{0.1277 + 0.02555\bar{z}^{-1} + 0.1277\bar{z}^{-2}}{1 - 0.7664\bar{z}^{-1} + 0.2774\bar{z}^{-2}}$, 抽样频率为 $f_s = 8\text{kHz}$, 且数字低通通带截止频率为 $f'_c = 2\text{kHz}$, 利用数字域频率变换方法设计下列数字滤波器。

1. 设计数字带通滤波器, 要求下、上限截止频率分别 $f_1 = 1.5\text{kHz}$, $f_2 = 2.5\text{kHz}$;
2. 设计数字带阻滤波器, 要求下、上限截止频率分别为: $f_1 = 1\text{kHz}$, $f_2 = 3\text{kHz}$;
3. 设计数字高通滤波器, 要求截止频率为 $f_c = 1\text{kHz}$ 。

解: 1. 设计数字带通滤波器, 要求下、上限截止频率分别为

$$f_1 = 1.5\text{kHz}, \quad f_2 = 2.5\text{kHz}$$

① 所要设计的数字带通滤波器上、下限截止角频率和数字低通通带截止角频率分别为

$$\omega_2 = \frac{2\pi f_2}{f_s} = 2\pi \times 2.5 / 8 = 0.625\pi$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi f_1}{f_s} = \frac{2\pi \times 1.5}{8} = 0.375\pi$$

$$\omega'_c = \frac{2\pi f'_c}{f_s} = \frac{2\pi \times 2}{8} = 0.5\pi$$

② 分别求 k 和 a (利用如下公式)

$$k = \cot\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right) \tan \frac{\omega'_c}{2} \quad \text{和} \quad a = -\frac{\cos[(\omega_2 + \omega_1)/2]}{\cos[(\omega_2 - \omega_1)/2]}$$

$$k = \cot\left(\frac{\pi}{8}\right) \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2.4142$$

$$a = -\frac{\cos[(\omega_2 + \omega_1)/2]}{\cos[(\omega_2 - \omega_1)/2]} = \frac{\cos(\pi/2)}{\cos(\pi/8)} = 0$$

则有

$$\frac{2ak}{k+1} = 0, \quad \frac{k-1}{k+1} = \frac{2.4142-1}{2.4142+1} = 0.4142$$

数字低通变换为数字带通的公式简化为

$$\bar{z}^{-1} = -\frac{\frac{k-1}{k+1} - \frac{2ak}{k+1}z^{-1} + z^{-2}}{1 - \frac{2ak}{k+1}z^{-1} + \frac{k-1}{k+1}z^{-2}} = -\frac{z^{-2} + 0.4142}{1 + 0.4142z^{-2}}$$

$$H_{\text{dBP}}(z) = H_{\text{dLP}}(\bar{z}) \Big|_{\bar{z}^{-1} = -\frac{z^{-2} + 0.4142}{1 + 0.4142z^{-2}}} = \frac{0.1277 + 0.02555\bar{z}^{-1} + 0.1277\bar{z}^{-2}}{1 - 0.7664\bar{z}^{-1} + 0.2774\bar{z}^{-2}} \Big|_{\bar{z}^{-1} = -\frac{z^{-2} + 0.4142}{1 + 0.4142z^{-2}}}$$

2. 设计数字带阻滤波器, 要求带阻滤波器的下、上限截止频率分别为

$$f_1 = 1\text{kHz}, f_2 = 3\text{kHz}$$

所要设计带阻滤波器的上、下限截止频率分别为

$$f_1 = 1\text{kHz}, f_2 = 3\text{kHz}$$

$$\omega_1 = 2\pi f_1 / f_s = 2\pi \times 1 / 8 = 0.25\pi$$

$$\omega_2 = 2\pi f_2 / f_s = 2\pi \times 3 / 8 = 0.75\pi$$

$$k = \tan\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right) \tan\frac{\omega'_c}{2} = 1, \quad a = \frac{\cos[(\omega_2 + \omega_1)/2]}{\cos[(\omega_2 - \omega_1)/2]} = 0, \quad \frac{1-k}{k+1} = 0, \quad \frac{2a}{k+1} = 0$$

则转换公式简化为

$$\bar{z}^{-1} = z^{-2}$$

数字带阻滤波器的系统函数是

$$H_{\text{dBS}}(z) = H_{\text{dLP}}(\bar{z}) \Big|_{\bar{z}^{-1}=z^{-2}} = \frac{0.1277 + 0.0255\bar{z}^{-1} + 0.1277\bar{z}^{-2}}{1 - 0.7664\bar{z}^{-1} + 0.2774\bar{z}^{-2}} \Big|_{\bar{z}^{-1}=z^{-2}}$$

3. 设计数字高通滤波器, 要求截止频率为 $f_c = 1\text{kHz}$ 。

① 数字低通带截止频率

$$\omega'_c = \frac{2\pi f'_c}{f_s} = 2\pi \times 2 / 8 = 0.5\pi \quad (\text{其中 } f'_c = 2\text{kHz}, f_s = 8\text{kHz})$$

② 所要设计的数字高通滤波器的截止频率

$$\omega_c = \frac{2\pi f_c}{f_s} = \frac{2\pi \times 1000}{8000} = 0.25\pi$$

③ 计算参数 a

$$a = -\frac{\cos[(\omega'_c + \omega_c)/2]}{\cos[(\omega'_c - \omega_c)/2]} = -\frac{\cos(0.375\pi)}{\cos(0.125\pi)} = -\frac{0.3827}{0.9239} = -0.4142$$

④ 利用 $\bar{z} = -\frac{z+a}{1+az}$ (其中 $a = -0.4142$) , 代入数字低通转换成数字高通, 即

$$H_{\text{dBS}}(z) = H_{\text{dLP}}(\bar{z}) \Big|_{\bar{z}^{-1} = -\frac{-0.4142+z^{-1}}{1-0.4142z^{-1}}} = \frac{0.1277 + 0.0255\bar{z}^{-1} + 0.1277\bar{z}^{-2}}{1 - 0.7664\bar{z}^{-1} + 0.2774\bar{z}^{-2}} \Big|_{\bar{z}^{-1} = -\frac{-0.4142+z^{-1}}{1-0.4142z^{-1}}}$$

如抽样频率设为 $f_s = 6\text{kHz}$, 本设计就大为简化 $\omega'_c = \frac{2\pi \times 2}{6} = \frac{2\pi}{3}$, $\omega_c = \frac{2\pi \times 1}{6} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow a = 0$, 转换

公式简化为 $\bar{z}^{-1} = -z^{-1}$, 在满足抽样要求的情况下, 适当处理, 尽可能使转换公式简化。

4. 仿真程序如下, 仿真结果如图 5-35~图 5-37 所示。

```
wcdbpw1=2*pi*1/8;
wcdbpw1=2*pi*3/8;
wc1=2*pi*2/8
num=[0.1277,0.2555,0.1277]
den=[1,-0.7664,0.2774]
k=cot((wcdbpw1-wcdbpw1)/2)*tan(wc1/2)
a=cos((wcdbpw1+wcdbpw1)/2)/cos((wcdbpw1-wcdbpw1)/2)
Nz=[0,0,1];
Dz=[1];
num1=[0.1277,0,-0.2555,0,0.1277];
den1=[1,0,0.7664,0,0.2774];
[Hlp,wlp]=freqz(num,den);
subplot(221);plot(wlp,abs(Hlp));grid;
```

```

xlabel('frequency');ylabel('magnitude of DLPF')
[Hhp,whp]=freqz(num1,den1,1024)
subplot(222);plot(whp,abs(Hhp));grid;
xlabel('frequency');ylabel('magnitude of DBPF')

```

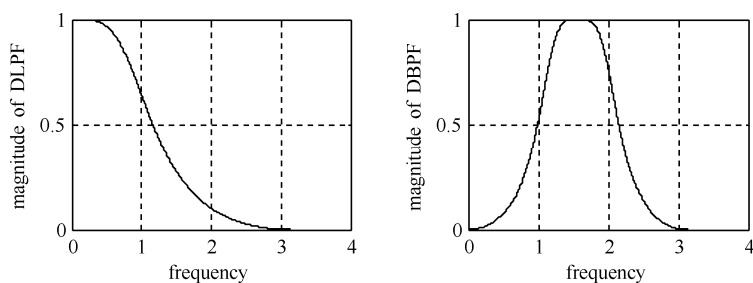


图 5-35 例 5-12 数字带通滤波器设计

```

wcdbp1=2*pi*1/8;
wcdbpw1=2*pi*3/8;
wc1=2*pi*2/8
num=[0.1277,0.2555,0.1277]
den=[1,-0.7664,0.2774]
k=tan((wcdbpw1-wcdbp1)/2)*tan(wc1/2)
a=cos((wcdbpw1+wcdbp1)/2)/cos((wcdbpw1-wcdbp1)/2)
Nz=[0,0,1];
Dz=[1];
num2=[0.1277,0,0.2555,0,0.1277];
den2=[1,0,-0.7664,0,0.2774];
[Hlp,wlp]=freqz(num,den);
subplot(221);plot(wlp,abs(Hlp));grid;
xlabel('frequency');ylabel('magnitude of DLPF')

[Hhp,whp]=freqz(num2,den2)
subplot(222);plot(whp,abs(Hhp));
xlabel('frequency');ylabel('magnitude of DBEF')

```

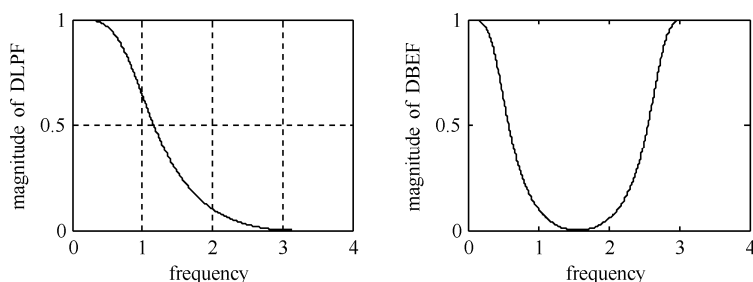


图 5-36 例 5-12 数字带阻滤波器设计

```

wcdlp1=2*pi*2/8;
wcdhpl=2*pi*1/8;
num=[0.1277,0.2555,0.1277]
den=[1,-0.7664,0.2774]
[H,w]=freqz(num,den)
subplot(221);plot(w,abs(H));grid;
xlabel('frequency');ylabel('magnitude of DLPF');
a=cos((wcdlp1+wcdhpl)/2)/cos((wcdlp1-wcdhpl)/2)
Nz=-[a,1];

```

```

Dz=[1,a];
[bhp,ahp]=zmapping(num,den,Nz,Dz)
[Hhp,whp]=freqz(bhp,ahp)
subplot(222);plot(whp,abs(Hhp));grid;
xlabel('frequency');ylabel('magnitude of DLPF');

```

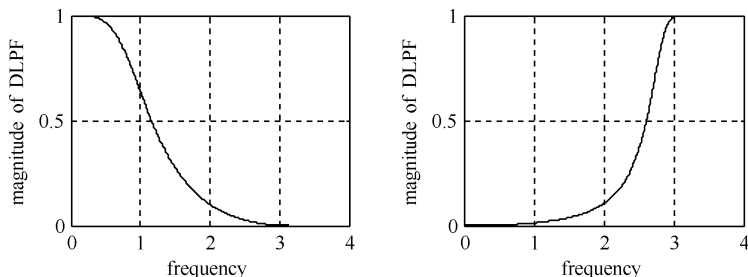


图 5-37 例 5-12 数字高通滤波器设计

注：本例的仿真均要调用 `function[bz,az]=zmapping(bZ,aZ,Nz,Dz)`。

5.5.6 IIR 数字滤波器综合设计举例

【例 5-13】 试用数字域频率变换法设计一个数字低通滤波器，要求通带边界频率为 1kHz，通带内最大衰减 $\leq 3\text{dB}$ ，阻带最小衰减 $\geq 18\text{dB}$ ，阻带边界频率为 2.5kHz，抽样频率为 10kHz，通带、阻带衰减单调。

解：1. 设计归一化原型模拟低通滤波器。

① 将数字低通滤波器的性能指标转换为模拟低通滤波器的性能指标。

数字滤波器的指标

通带边界频率为

$$\omega_p = 2\pi f_p / f_c = 0.2\pi$$

阻带边界频率为

$$\omega_s = 2\pi f_s / f_c = 0.5\pi$$

模拟低通带、阻带边界频率（采用双线性变换法离散化，边界频率转换必须用下式）分别为

$$\Omega_p = c \tan(\omega_p / 2) = 0.3249c$$

$$\Omega_s = c \tan(\omega_s / 2) = 1.0000c$$

通带指标

$$\text{通带最大衰减 } \delta_p = 3\text{dB} \quad (\text{衰减不变})$$

阻带指标

$$\text{阻带最小衰减 } \delta_s = 18\text{dB} \quad (\text{衰减不变})$$

② 求归一化原型模拟低通滤波器的边界频率指标。

通带边界频率指标（归一化的）

$$\bar{\Omega}_p = \frac{\Omega_p}{\Omega_p} \Big|_{\Omega=\Omega_p} = 1$$

阻带边界频率指标（归一化的）

$$\bar{\Omega}_s = \frac{\Omega_s}{\Omega_p} \bigg|_{\Omega=\Omega_p} = \frac{c \tan \frac{\omega_s}{2}}{c \tan \frac{\omega_p}{2}} = \frac{\tan \pi / 4}{\tan \pi / 10} = 3.0778$$

通带最大衰减

$$\delta_p = 3\text{dB}$$

阻带最小衰减

$$\delta_s = 18\text{dB} \quad (\text{两个衰减不变})$$

2. 设计归一化原型模拟低通滤波器。

① 由两个边界频率和两个衰减指标计算 N ，根据计算公式，则有

$$N = \lg \frac{(10^{0.1\alpha_s} - 1)}{(10^{0.1\alpha_p} - 1)} \bigg/ 2 \lg \left(\frac{\bar{\Omega}_s}{\bar{\Omega}_p} \right) = \lg \left(\frac{62.096}{0.995} \right) \bigg/ 2 \lg(3.0778) = 1.7952 / 0.9764 = 1.8384$$

取 $N=2$ ，3dB 归一化参考频率 $\bar{\Omega}_c = \bar{\Omega}_p (10^{0.1\delta_p} - 1)^{-1/4} = \frac{1}{0.9988} \approx 1.00$ 。

② 根据 $N=2$ ，查归一化巴特沃斯原型模拟低通表，得到归一化巴特沃斯原型模拟低通滤波器的系统函数

$$H_{\text{aLP}}(\bar{s}) = \frac{1}{\bar{s}^2 + \sqrt{2}\bar{s} + 1}$$

③ 去归一化（本例归一化参考频率为 1）可以略过，即

$$H_{\text{aLP}}(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

3. 求数字原型低通滤波器的系统函数，直接代入双线性变换公式。

$$H_{\text{dLP}}(\bar{z}) = H_{\text{aLP}}(s) \bigg|_{s=c \frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1}} = \frac{1}{(c \frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1})^2 + \sqrt{2}(c \frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1}) + 1}$$

4. 求所要设计的数字滤波器的系统函数 $H_{\text{dLP}}(z)$ 。

因为采用双线性变换法离散化，则数字原型低通滤波器的截止频率 ω'_c 与模拟原型低通滤波器的截止频率按双线性变换公式转换，即

$$\bar{\Omega}_c = c \tan(\omega'_c / 2) = 1$$

计算参数 a ，即

$$a = \frac{\sin[(\omega'_c - \omega_c) / 2]}{\sin[(\omega'_c + \omega_c) / 2]} = \frac{\tan(\omega'_c / 2) - \tan(\omega_c / 2)}{\tan(\omega'_c / 2) + \tan(\omega_c / 2)} = \frac{\frac{1}{c} - \tan(\omega_c / 2)}{\frac{1}{c} + \tan(\omega_c / 2)}$$

其中利用两角之和的三角公式，并且为了简化公式，令 $c=2$ ，则参数 a 简化为

$$a = \frac{(1/2) - 0.3249}{(1/2) + 0.3249} = 0.2123 \quad (\omega_c = \omega_p)$$

将上式代入数字原型低通和所要设计的实际数字低通的频率转换公式

$$\bar{z}^{-1} = \frac{z^{-1} - 0.2123}{1 - 0.2123z^{-1}}$$

将上式代入 $H_{\text{dLP}}(\bar{z})$ 中，则有

$$H_{\text{dLP}}(z) = H_{\text{dLP}}(\bar{z}) \bigg|_{\bar{z}^{-1} = \frac{z^{-1} - 0.2123}{1 - 0.2123z^{-1}}} = \frac{1}{\left(c \frac{1 - \bar{z}^{-1}}{1 + \bar{z}^{-1}} \right)^2 + \sqrt{2} \left(c \frac{1 - \bar{z}^{-1}}{1 + \bar{z}^{-1}} \right) + 1} \bigg|_{\bar{z}^{-1} = \frac{z^{-1} - 0.2123}{1 - 0.2123z^{-1}}}$$

$$= \frac{(0.7877z + 0.7877)^2}{4(1.2123z - 1.2123) + 2\sqrt{2}(0.9510z^2 - 0.9549) + (0.7877z + 0.7877)^2}$$

最后整理成关于 z 的有理函数。

5. 仿真程序如下, 仿真结果如图 5-38 所示。

```
wp=2*pi*1/10
ws=2*pi*2.5/10
wss=2*pi
Wp=2*tan(wp/2)
Ws=2*tan(ws/2)% c=2
Rp=3;
Rs=18;
WP= Wp/Wp
WS=Ws/Wp
[N,Wc]=buttord(WP,WS,Rp,Rs,'s')
[Z,P,K]=butter(N,1,'s')
[A,B,C,D]=zp2ss(Z,P,K)
[num0,den0]=zp2tf(Z,P,K)
TA=tf(num0,den0)
WC=1;
[num1,den1]=bilinear(num0,den0,'z')
Z=tf(num1,den1,1)
[h,w]=freqz(num1,den1)
subplot(221);plot(w,abs(h));grid;
xlabel('frequency');ylabel('magnitude of DLPF')
axis([0,0.1,0,1])
wC=0.5*pi
wc=wp
a=(sin(wC-wc)/2)/(sin(wC+wc))
Nz=[-0.2123,1];
Dz=[1,-0.2123];
[bdlp,adlp]=zmapping(num1,den1,Nz,Dz);
[Hdlp,Wdlp]=freqz(bdlp,adlp,1024);
subplot(222);plot(Wdlp,abs(Hdlp));grid;
xlabel('frequency');ylabel('Desired DLPF');
axis([0,0.1,0,1])
```

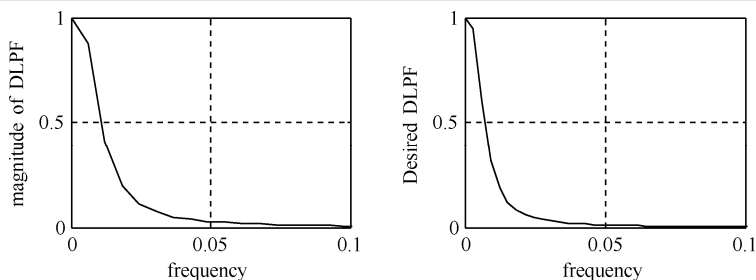


图 5-38 例 5-13 数字低通滤波器设计

注: 本题的仿真需要调用 `function[bz,az]=zmapping(bZ,aZ,Nz,Dz)` 程序。

【例 5-14】 试用数字域频率变换法设计数字带通滤波器, 要求: ①通带内衰减 $\leq 3\text{dB}$; ②通带下

限频率和上限频率分别为 0.45π 和 0.55π ；③阻带内衰减 $\geq 18\text{dB}$ ；④下阻带频率和上阻带频率分别为 $0 \leq \omega \leq 0.3\pi$ 和 $0.7 \leq \omega \leq \pi$ ；⑤要求通带、阻带衰减单调递减。

解：1. 设计归一化模拟原型低通滤波器。

① 将数字滤波器的指标转换为与数字滤波器同一类型的模拟滤波器的指标。

数字滤波器的指标

通带指标：通带内衰减 $\delta_p \leq 3\text{dB}$ ，通带下限频率和上限频率分别为 0.45π 和 0.55π 。

阻带指标：阻带内衰减 $\delta_s \geq 18\text{dB}$ ，下阻带和上阻带频率分别为 $0 \leq \omega \leq 0.3\pi$ 和 $0.7 \leq \omega \leq \pi$ 。

离散化采用双线性变换，所以双线性变换采用频率预畸变，将数字指标转换成对应模拟带通滤波器指标。

模拟带通滤波器指标

通带指标： $\delta_p \leq 3\text{dB}$ ，通带下限频率和上限频率分别为

$$\Omega_{p1} = c \tan(\omega_{p1}/2) = c \tan(0.225\pi), \quad \Omega_{p2} = c \tan(\omega_{p2}/2) = c \tan(0.275\pi)$$

阻带指标： $\delta_s \geq 18\text{dB}$ ，阻带下限频率和上限频率分别为

$$\Omega_{s1} = c \tan(\omega_{s1}/2) = c \tan(0.15\pi), \quad \Omega_{s2} = c \tan(\omega_{s2}/2) = c \tan(0.35\pi)$$

② 将模拟带通滤波器指标转换成归一化模拟低通滤波器指标（用低通与带通的模拟域频率变换）。

通带指标： $\delta_p \leq 3\text{dB}$ ，通带下限频率和上限频率分别为

$$\bar{\Omega}_{p1} = \frac{\Omega^2 - \Omega_0^2}{\Omega B} \Big|_{\Omega=\Omega_{p1}} = \frac{\Omega_{p1}^2 - \Omega_{p1}\Omega_{p2}}{\Omega_{p1}(\Omega_{p2} - \Omega_{p1})} = -1, \quad \bar{\Omega}_{p2} = \frac{\Omega_{p2}^2 - \Omega_{p1}\Omega_{p2}}{\Omega_{p2}(\Omega_{p2} - \Omega_{p1})} = 1$$

阻带指标： $\delta_s \geq 18\text{dB}$ ，下阻带和上阻带频率分别为

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_{s1} &= \frac{\Omega^2 - \Omega_0^2}{\Omega B} \Big|_{\Omega=\Omega_{s1}} = \frac{\Omega_{s1}^2 - \Omega_{p1}\Omega_{p2}}{\Omega_{s1}(\Omega_{p2} - \Omega_{p1})} \\ &= \frac{c^2 \tan^2(\omega_{s1}/2) - c \tan(\omega_{p1}/2) c \tan(\omega_{p2}/2)}{c \tan(\omega_{s1}/2)(c \tan(\omega_{p2}/2) - c \tan(\omega_{p1}/2))} \\ &= \frac{c^2 \tan^2(0.15\pi) - c \tan(0.225\pi) c \tan(0.275\pi)}{c \tan(0.15\pi)(c \tan(0.275\pi) - c \tan(0.225\pi))} \\ &= \frac{0.2597 - 0.8541 \times 1.1710}{0.5096 \times (1.1710 - 0.8541)} = \frac{-0.7405}{0.1615} = -4.5851 \\ \bar{\Omega}_{s2} &= \frac{\Omega^2 - \Omega_0^2}{\Omega B} \Big|_{\Omega=\Omega_{s2}} = \frac{\Omega_{s2}^2 - \Omega_{p1}\Omega_{p2}}{\Omega_{s2}(\Omega_{p2} - \Omega_{p1})} \\ &= \frac{c^2 \tan^2(0.35\pi) - c \tan(0.225\pi) c \tan(0.275\pi)}{c \tan(0.35\pi)(c \tan(0.275\pi) - c \tan(0.225\pi))} \\ &= \frac{1.9630^2 - 1.0001}{1.9630 \times (1.1710 - 0.8541)} = \frac{2.8532}{0.6221} = 4.5864 \end{aligned}$$

根据选取原则， $\bar{\Omega}_p = 1$ ， $\bar{\Omega}_s = \min[|\bar{\Omega}_{s1}|, |\bar{\Omega}_{s2}|] = 4.5851$ ，保证阻带衰减指标。

③ 计算巴特沃斯低通滤波器阶数 N 。

$$N = \lg \frac{(10^{0.1\alpha_s} - 1)}{(10^{0.1\alpha_p} - 1)} \Big/ 2 \lg \left(\frac{\bar{\Omega}_s}{\bar{\Omega}_p} \right) = \lg \frac{(10^{1.8} - 1)}{(10^{0.3} - 1)} \Big/ 2 \lg \left(\frac{4.5851}{1} \right) = 1.795 / 1.3226 = 1.3573$$

这里取 $N=2$ 。

- ④ 根据 N 值, 查巴特沃斯归一化低通滤波器表, 则有巴特沃斯归一化低通滤波器系统函数

$$H_{\text{aLP}}(\bar{s}) = \frac{1}{\bar{s}^2 + \sqrt{2}\bar{s} + 1}$$

2. 利用双线性变换法, 将巴特沃斯归一化低通滤波器系统函数转换为数字低通系统函数

$$H_{\text{dLP}}(\bar{z}) = H_{\text{aLP}}(\bar{s}) \bigg|_{\bar{s} = \frac{2(1-\bar{z}^{-1})}{T(1+\bar{z}^{-1})}} = \frac{(1+\bar{z}^{-1})^2}{4(1-\bar{z}^{-1})^2 + 2\sqrt{2}(1-\bar{z}^{-2}) + (1+\bar{z}^{-1})^2}$$

这里取 $T=1$, $c=2$ 。

3. 求所要设计的数字带通滤波器的系统函数 $H_{\text{dBP}}(z)$ 。

- ① 先求数字低通原型滤波器的通带频率。

$$\omega'_p = 2 \arctan(1/2) = 0.2952\pi \quad (\text{利用预畸变关系 } \bar{\Omega}_p = c \tan(\omega'_p/2) = 1)$$

- ② 根据数字低通到数字带通的参数公式求参数, 则有

$$a = \frac{\cos[(\omega_2 + \omega_1)/2]}{\cos[(\omega_2 - \omega_1)/2]} = \frac{\cos[(0.45 + 0.55)\pi/2]}{\cos[(0.45 - 0.55)\pi/2]} = 0$$

$$k = \cot\left(\frac{0.55\pi - 0.45\pi}{2}\right) \tan \frac{0.2952\pi}{2} = 3.1569$$

$$\frac{2ak}{k+1} = 0, \quad \frac{k-1}{k+1} = \frac{3.1569-1}{3.1569+1} = 0.5189 \Rightarrow \bar{z}^{-1} = -\frac{z^{-2} + 0.5189}{0.5189z^{-2} + 1}$$

- ③ 用数字低通到数字带通的数字域频率变换公式, 将数字低通转换为数字带通。

$$H_{\text{dBP}}(z) = H_{\text{dLP}}(\bar{z}) \bigg|_{\bar{z}^{-1} = -\frac{z^{-2} + 0.5189}{0.5189z^{-2} + 1}} = \frac{(1+\bar{z}^{-1})^2}{4((1-\bar{z}^{-1})^2 + 2\sqrt{2}(1-\bar{z}^{-2}) + (1+\bar{z}^{-1})^2)} \bigg|_{\bar{z}^{-1} = -\frac{z^{-2} + 0.5189}{0.5189z^{-2} + 1}}$$

4. 仿真程序如下, 仿真结果如图 5-39 所示。

```
wpl=0.45*pi;
wpu=0.55*pi;
wsl=0.3*pi;
wsu=0.7*pi;
Rp=3;
Rs=18;
c=2
Wpu=c*tan(wpu/2)
Wsl=c*tan(wsl/2)
Wsu=c*tan(wsu/2)
Wp=1;
Ws1 = ((tan(wsl/2)^2-tan(wpl/2)*tan(wpu/2))/(tan(wsl/2)*(tan(wpu/2)-tan
(wpl/2))))
Ws2 = ((tan(wsu/2)^2-tan(wpl/2)*tan(wpu/2))/(tan(wsu/2)*(tan(wpu/2)-tan
(wpl/2))))
Ws = min(abs(Ws1),abs(Ws2))
[N,W]=buttord(Wp,Ws,Rp,Rs,'s')
[Z,P,K]=butter(N,1,'s')
[num,den]=zp2tf(Z,P,K)
[h,w]=freqs(num,den,'s')
figure(1)
subplot(221);plot(w,abs(h));grid;
xlabel('frequency');ylabel('magnitude of ALPF')
[num1,den1]=bilinear(num,den,10)
[h2,w2]=freqz(num1,den1)
subplot(222);plot(w2,abs(h2));grid;
```

```

xlabel('frequency');ylabel('magnitude of DLPF')
axis([0,1,0,1])
Nz=-[0.5189,0,1];
Dz=[1,0,0.5189];
num2=[0.2315,0,-0.4630,0,0.2315];
den2=[11.5262,0,17.9934,0,7.9930];
[H3,W3]=freqz(num2,den2)
subplot(223);plot(W3,abs(H3));grid;
xlabel('frequency');ylabel('magnitude of DBPF')

```

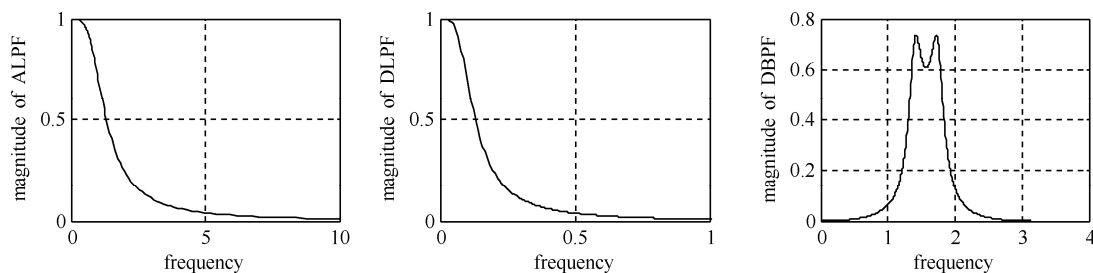


图 5-39 例 5-14 数字带通滤波器设计

【例 5-15】 试用数字低通设计数字带阻 (数字域频率变换法), 要求 3dB 衰减对应频率为 $f_{p1}=12.5\text{kHz}$ 、 $f_{p2}=37.5\text{kHz}$; 26dB 衰减对应频率为 $f_{s1}=18\text{kHz}$ 、 $f_{s2}=25\text{kHz}$; 抽样频率为 $f_s=100\text{kHz}$, 要求通带、阻带衰减单调。

解: 1. 将所要设计的数字带阻滤波器的指标转换为模拟带阻滤波器的指标。

① 数字带阻滤波器的通带、阻带边界频率和通带、阻带衰减。

通带、阻带边界频率

$$\omega_{p1} = 2\pi f_{p1} / f_s = (2\pi \times 12.5 \times 10^3) / (100 \times 10^3) = 0.25\pi$$

$$\omega_{p2} = 2\pi f_{p2} / f_s = (2\pi \times 37.5 \times 10^3) / (100 \times 10^3) = 0.75\pi$$

$$\omega_{s1} = 2\pi f_{s1} / f_s = (2\pi \times 18 \times 10^3) / (100 \times 10^3) = 0.36\pi$$

$$\omega_{s2} = 2\pi f_{s2} / f_s = (2\pi \times 25 \times 10^3) / (100 \times 10^3) = 0.5\pi$$

通带、阻带衰减

$$\delta_p = 3\text{dB}$$

$$\delta_s = 26\text{dB}$$

② 通过双线性变换的频率转换公式, 将数字带阻滤波器的指标转换为模拟带阻滤波器的指标 (必须用双线性变换)。

通带、阻带边界频率

$$\Omega_{p1} = c \tan(\omega_{p1} / 2) = 0.4142c, \quad \Omega_{p2} = c \tan(\omega_{p2} / 2) = 2.4142$$

$$\Omega_{s1} = c \tan(\omega_{s1} / 2) = 0.6346c, \quad \Omega_{s2} = c \tan(\omega_{s2} / 2) = c$$

通带、阻带衰减:

$$\delta_p = 3\text{dB}$$

$$\delta_s = 26\text{dB}$$

2. 设计模拟归一化低通滤波器。

① 利用模拟域的频率变换 (模拟带阻与模拟低通的频率转换关系) 将模拟带通指标转换为归一化模拟低通指标。

通带边界频率

$$\bar{\Omega}_{p1} = \frac{\Omega B}{\Omega_0^2 - \Omega^2} \Big|_{\Omega=\Omega_{p1}} = \frac{\Omega_{p1}(\Omega_{p2} - \Omega_{p1})}{\Omega_{p1}\Omega_{p2} - \Omega_{p1}^2} = 1$$

$$\bar{\Omega}_{p2} = \frac{\Omega B}{\Omega_0^2 - \Omega^2} \Big|_{\Omega=\Omega_{p2}} = \frac{\Omega_{p2}(\Omega_{p2} - \Omega_{p1})}{\Omega_{p1}\Omega_{p2} - \Omega_{p2}^2} = -1$$

这里归一化原型低通滤波器的通带频率 $\bar{\Omega}_p = 1$ ，通带最大衰减 3dB。

阻带边界频率

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_{s1} &= \frac{\Omega B}{\Omega_0^2 - \Omega^2} \Big|_{\Omega=\Omega_{s1}} = \frac{\Omega_{s1}(\Omega_{p2} - \Omega_{p1})}{\Omega_{p1}\Omega_{p2} - \Omega_{s1}^2} \\ &= \frac{\tan\left(\frac{\omega_{s1}}{2}\right)\left(\tan\left(\frac{\omega_{p2}}{2}\right) - \tan\left(\frac{\omega_{p1}}{2}\right)\right)}{\tan\left(\frac{\omega_{p1}}{2}\right)\tan\left(\frac{\omega_{p2}}{2}\right) - \tan^2\left(\frac{\omega_{s1}}{2}\right)} \\ &= \frac{\tan 0.18\pi(\tan 0.375\pi - \tan 0.125\pi)}{\tan 0.125\pi \tan 0.375\pi - \tan^2 0.18\pi} = 2.1250 \\ \frac{\Omega B}{\Omega_0^2 - \Omega^2} \Big|_{\Omega=\Omega_{s2}} &= \frac{\tan\left(\frac{\omega_{s2}}{2}\right)\left(\tan\left(\frac{\omega_{p2}}{2}\right) - \tan\left(\frac{\omega_{p1}}{2}\right)\right)}{\tan\left(\frac{\omega_{p1}}{2}\right)\tan\left(\frac{\omega_{p2}}{2}\right) - \tan^2\left(\frac{\omega_{s2}}{2}\right)} \approx -\frac{2}{1-0.9999} \end{aligned}$$

取归一化原型低通滤波器的阻带频率为 $\bar{\Omega}_s = \min[|\Omega_{s1}|, |\Omega_{s2}|] = 2.1250$

这样可以保证阻带衰减 ($\geq 26\text{dB}$) 或提高阻带衰减指标。

② 求模拟低通的阶数 N (将两个边界频率和两个衰减代入, 求 N 公式)。

$$N \geq \lg \frac{(10^{0.1\alpha_s} - 1)}{(10^{0.1\alpha_p} - 1)} / 2 \lg \left(\frac{\bar{\Omega}_s}{\bar{\Omega}_p} \right) = \lg \frac{(10^{2.6} - 1)}{(10^{0.3} - 1)} / 2 \lg \left(\frac{2.5989}{0.6547} \right) = 3.9696$$

取 $N = 4$ ，截止频率 (位于 3dB) $\Omega_c = 1$ ，($\Omega_c = \bar{\Omega}_p = 1$)

③ 根据 $N = 4$ ，查得归一化模拟原型低通滤波器的系统函数

$$H_{\text{aLP}}(\bar{s}) = \frac{1}{\bar{s}^4 + 2.6131\bar{s}^3 + 3.4142\bar{s}^2 + 2.6131\bar{s} + 1}$$

3. 求数字原型低通滤波器的系统函数 $H_{\text{dLP}}(\bar{z})$ (利用双线性变换法, 并令 $T = 1$)。

$$H_{\text{dLP}}(\bar{z}) = H_{\text{aLP}}(\bar{s}) \Big|_{\bar{s}=2\frac{1-\bar{z}^{-1}}{1+\bar{z}^{-1}}} = \frac{1}{\bar{s}^4 + 2.6131\bar{s}^3 + 3.4142\bar{s}^2 + 2.6131\bar{s} + 1} \Big|_{\bar{s}=2\frac{1-\bar{z}^{-1}}{1+\bar{z}^{-1}}}$$

4. 设计所要设计的数字带阻滤波器的系数函数 $H_{\text{dBS}}(z)$ 。

① 求出数字原型低通滤波器的通带截止频率 ω'_p (通过双线性变换预畸变关系 $\bar{\Omega}_p = c \tan(\omega'_p/2) = 1$ ， $\omega'_p = 2 \arctan(1/2) = 0.2952\pi$ ，并利用数字域频率变换的数字低通到数字带阻的参数公式, 求参数 a 、 k 。

$$a = \frac{\cos[(\omega_2 + \omega_1)/2]}{\cos[(\omega_2 - \omega_1)/2]} = \frac{\cos[(0.25\pi + 0.75\pi)/2]}{\cos[(0.25\pi - 0.75\pi)/2]} = 0$$

$$k = \tan\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right) \tan \omega'_p = \tan\left(\frac{0.75\pi - 0.25\pi}{2}\right) \tan \frac{0.2952\pi}{2} = 0.5$$

$$\frac{2a}{k+1} = 0, \quad \frac{1-k}{1+k} = 1/3$$

② 利用数字域的频率变换公式，将数字低通滤波器的系统函数转换成所要设计的数字带阻滤波器的系统函数

$$H_{\text{dBS}}(z) = H_{\text{dLP}}(\bar{z}) \bigg|_{\bar{z}^{-1} = \frac{z^{-2} + 1/3}{1/3z^{-2} + 1}}$$

$$= \frac{3.1605z^{-8} + 12.4938z^{-6} + 15.7284z^{-4} + 8.7807z^{-2} + 2.1605}{-3.8757z^{-8} - 5.364z^{-6} + 16.3449z^{-4} + 5.3641z^{-2} + 38.1291}$$

5. 仿真程序如下，仿真结果如图 5-40 所示。

```
wpl=0.25*pi;
wpu=0.75*pi;
wsl=0.36*pi;
wsu=0.5*pi;
Rp=3;
Rs=25;
c=2
Wpl=c*tan(wpl/2)
Wpu=c*tan(wpu/2)
Wsl=c*tan(wsl/2)
Wsu=c*tan(wsu/2)
Wp=1;
Ws1 = ((tan(wsl/2)*(tan(wpu/2)-tan(wpl/2)))/(tan(wpl/2)*tan(wpu/2)-tan
(wsl/2)^2))
Ws2 = ((tan(wsu/2)*(tan(wpu/2)-tan(wpl/2)))/(tan(wpl/2)*tan(wpu/2)-tan
(wsu/2)^2))
Ws = min(abs(Ws1),abs(Ws2))
[N,W]=buttord(Wp,Ws,Rp,Rs,'s')
[Z,P,K]=butter(N,1,'s')
[num,den]=zp2tf(Z,P,K)
H=tf(num,den)
[h,w]=freqs(num,den,'s')
figure(2)
subplot(221);plot(w,abs(h));grid;
xlabel('frequency');ylabel('magnitude of ALPF')
[num1,den1]=bilinear(num,den,1)
[h2,w2]=freqz(num1,den1)
HD=tf(num1,den1,1);
subplot(222);plot(w2,abs(h2));grid;
xlabel('frequency');ylabel('magnitude of DLPF')
axis([0,4,0,1]);
a=cos(0.5*pi)/cos(0.25*pi)
k=tan((0.5*pi)/2)*tan((0.2952*pi)/2)
num4=[2.1605,0,8.7407,0,15.7284,0,12.4938,0,3.1605];
den4=[38.1291,0,5.3641,0,16.3449,0,-5.3640,0,-3.8757];
[h6,w6]=freqz(num4,den4,1024)
subplot(223);plot(w6,abs(h6))
xlabel('frequency');ylabel('magnitude of DBEF')
```

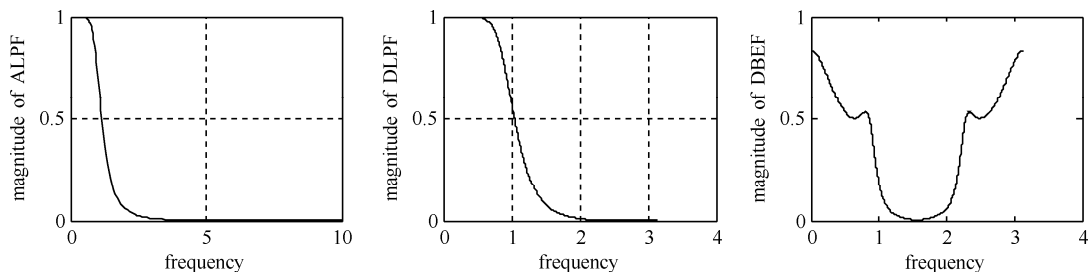


图 5-40 例 5-15 数字带阻滤波器设计

【例 5-16】 试通过数字域频率变换将数字低通滤波器转换成数字高通滤波器, 要求通带、阻带衰减单调, 通带 3dB 截止频率点对应于 $f_p = 3\text{kHz}$, 阻带截止频率 $f_s = 2\text{kHz}$, 通带最大衰减 $\leq 3\text{dB}$, 阻带最小衰减 $> 20\text{dB}$, 抽样频率 $f_s = 10\text{kHz}$ 。

解: 1. 将数字高通指标转换为模拟高通指标。

① 数字高通的通带、阻带数字角频率。

$$\omega_p = 2\pi f_p / f_c = (2\pi \times 3000) / 10000 = 0.6\pi$$

$$\omega_s = 2\pi f_s / f_c = (2\pi \times 2000) / 10000 = 0.4\pi$$

② 将数字高通指标转换为模拟高通指标, 必须采用双线性变换法, 因此用双线性变换法的频率转换公式要考虑频率预畸变, 则有

$$\Omega_p = c \tan(\omega_p / 2)$$

$$\Omega_s = c \tan(\omega_s / 2)$$

③ 利用模拟高通到模拟低通的频率变换公式, 求出归一化原型模拟低通滤波器的通带、阻带频率

$$\bar{\Omega}_p = 1, \quad \bar{\Omega}_s = \frac{c \tan(\omega_p / 2)}{c \tan(\omega_s / 2)} = 1.8945 \quad (\bar{\Omega}_s = \frac{\Omega_p}{\Omega_s})$$

两个衰减不变 (通带最大衰减为 3dB, 阻带最小衰减为 20dB)。

2. 根据要求应选择巴特沃斯归一化模拟低通滤波器设计, 求该滤波器的系统函数 $H_{\text{aLP}}(\bar{s})$ 。

先求巴特沃斯归一化模拟低通滤波器的阶数 N (将两个衰减、两个边界频率代入公式计算)。

$$N = \lg \frac{(10^{0.1\alpha_s} - 1)}{(10^{0.1\alpha_p} - 1)} \bigg/ 2 \lg \left(\frac{\bar{\Omega}_s}{\bar{\Omega}_p} \right) = \lg \frac{(10^{2.0} - 1)}{(10^{0.3} - 1)} \bigg/ 2 \lg \left(\frac{1.8945}{1} \right) = \frac{1.9987}{0.555} = 3.601$$

取 $N = 4$, 截止频率位于 3dB, 即 $\Omega_c = \bar{\Omega}_p = 1$, 用 $N = 4$ 查归一化巴特沃斯模拟低通表, 得到归一化巴特沃斯模拟低通滤波器的系统函数, 即

$$H_{\text{aLP}}(\bar{s}) = \frac{1}{\bar{s}^4 + 2.613\bar{s}^3 + 3.4142\bar{s}^2 + 2.6131\bar{s} + 1}$$

3. 求数字低通原型滤波器 (用双线性变换法离散化, 且令 $T = 1$)。

$$H_{\text{dLP}}(\bar{z}) = H_{\text{aLP}}(\bar{s}) \bigg|_{\bar{s} = 2 \frac{1 - \bar{z}^{-1}}{1 + \bar{z}^{-1}}}$$

4. 求所要设计的数字高通滤波器的系统函数 (数字域频率变换法) $H_{\text{dHP}}(z)$ 。

① 求数字低通原型的通带频率为 (利用双线性法预畸变关系 $\Omega_p = c \tan(\omega'_p / 2) = 1$)。

$$\omega'_p = 2 \arctan(1/2) = 0.2952\pi \quad (c = 2)$$

② 利用数字域频率变换法求参数 a 的公式 (见数字低通 \rightarrow 数字高通变换)。

$$a = -\frac{\cos[(\omega_c + \omega_c)/2]}{\cos[(\omega_c - \omega_c)/2]} = -\frac{\cos[(0.2952\pi + 0.6\pi)/2]}{\cos[(0.2952\pi - 0.6\pi)/2]} = -0.1846$$

数字低通到数字高通的变换公式为

$$\bar{z}^{-1} = -\frac{z^{-1} + a}{1 + az^{-1}} = -\frac{z^{-1} - 0.1846}{1 - 0.1846z^{-1}}$$

利用数字域频率变换(数字低通→数字高通变换公式), 求出所要设计的数字高通滤波器的系统函数

$$\begin{aligned} H_{\text{dHP}}(z) &= H_{\text{dLP}}(\bar{z}) \bigg|_{\bar{z}^{-1} = -\frac{z^{-1} - 0.1846}{1 - 0.1846z^{-1}}} = \left\{ \left[\frac{1}{\bar{s}^4 + 2.6131\bar{s}^3 + 3.4142\bar{s}^2 + 2.6131\bar{s} + 1} \right] \bigg|_{\bar{s} = 2\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \right\} \bigg|_{\bar{z}^{-1} = -\frac{z^{-1} - 0.1846}{1 - 0.1846z^{-1}}} \\ &= \frac{1}{\left(2\frac{1-\bar{z}^{-1}}{1+\bar{z}^{-1}} \right)^4 + 2.6131 \left(2\frac{1-\bar{z}^{-1}}{1+\bar{z}^{-1}} \right)^3 + 3.4142 \left(2\frac{1-\bar{z}^{-1}}{1+\bar{z}^{-1}} \right)^2 + 2.6131 \left(2\frac{1-\bar{z}^{-1}}{1+\bar{z}^{-1}} \right) + 1} \bigg|_{\bar{z}^{-1} = -\frac{z^{-1} - 0.1846}{1 - 0.1846z^{-1}}} \end{aligned}$$

最后整理关于 z 或 z^{-1} 的有理函数。

5. 仿真程序如下, 仿真结果如图 5-41 所示。

```
wp=2*pi*3000/10000;
ws=2*pi*2000/10000;
Rp=3;
Rs=20
Fs=2*pi
Wp=2*(tan(wp/2));
Ws=2*(tan(ws/2));
WP=1;
WS=1.8945
[N,W]=buttord(WP,WS,Rp,Rs,'s')
[Z,P,K]=butter(N,1,'s');
[num,den]=zp2tf(Z,P,K)
[halp,walp]=freqs(num,den,'s')
figure(1);
subplot(221);plot(walp,abs(halp));grid;
xlabel('frequency');ylabel('magnitude of ALPF');
axis([0,3,0,1])
[num1,den1]=bilinear(num,den,Fs)
[h2,w2]=freqz(num1,den1);
subplot(222);plot(w2,abs(h2));grid;
xlabel('frequency');ylabel('magnitude of DLPF');
axis([0,0.5,0,1]);
Nz=-[0.1846,1];
Dz=[1,0.1846];
[bdhp,adhp]=zmapping(num1,den1,Nz,Dz);
[hdhp,wdhp]=freqz(bdhp,adhp)
subplot(223);plot(wdhp,abs(hdhp));grid;
xlabel('frequency');ylabel('magnitude of DHPF');
axis([2,3.5,0,1.0])
```

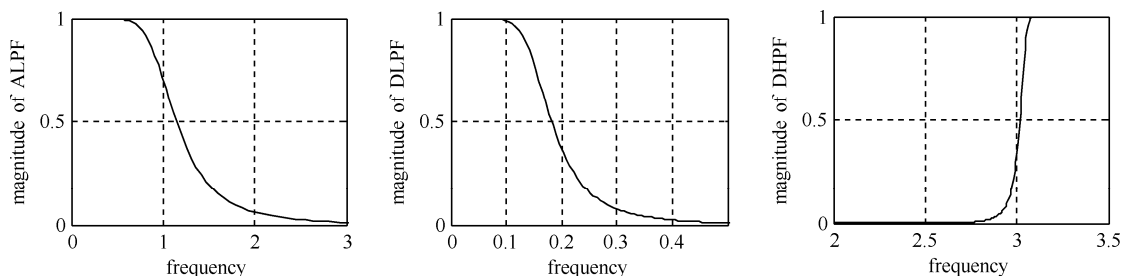


图 5-41 例 5-16 数字高通滤波器设计

注：本题的仿真均要调用 `function[bz,az] = zmapping(bZ,aZ,Nz,Dz)` 程序。

5.6 本章小结

本章介绍了 IIR 数字滤波器的基本概念、分类和滤波器的技术指标，详细讨论了 IIR 数字滤波器的设计步骤及方法。这一章所涉及的 IIR 滤波器的设计方法均以模拟滤波器设计为基础，重点介绍巴特沃斯模拟低通原型滤波器的设计(切比雪夫滤波器放在附录 A 中,椭圆函数滤波器设计等内容略去),模拟滤波器设计技术已非常成熟,有现成的图表供设计者使用。

主要的设计过程是首先将要设计的数字滤波器性能指标转换成模拟低通滤波器的指标,并设计出该滤波器,再转换成与要设计的数字滤波器同类型的模拟滤波器,最后用离散化的方法将模拟滤波器的系统函数转换成数字滤波器的系统函数。本章重点介绍两种离散化方法:冲激响应不变法和双线性变换法。两种方法各有优缺点。

冲激响应不变法是数字滤波器在时域上模拟模拟滤波器的性能,优点是模拟频率与数字频率为线性关系,缺点是产生频率响应混叠,原因是 s 平面到 z 平面为多值映射,造成高频成分与低频成分的叠加(混叠),此法适合低通和带通滤波器的设计。

双线性变换法克服了冲激响应不变法频率响应混叠的问题,但是要注意解决频率的非线性问题,这种方法适合低通、高通、带通和带阻等滤波器的设计。频率转换时,冲激响应不变法相对简单;离散化时,双线性变换法相对简单。

本章单独设两节专门讨论用频率变换法设计 IIR 数字滤波器,其中一种频率变换法是在模拟频率域进行的,设计过程为:先将数字滤波器的设计指标转换成与数字滤波器同型的模拟滤波器的指标,再转换成模拟低通滤波器的指标,然后设计模拟低通原型滤波器,再将其转换成与数字滤波器同型的模拟滤波器(模拟频率-模拟频率变换),最后离散化成希望设计的数字滤波器(利用离散化方法:冲激响应不变法或双线性变换法)。

另一种频率变换是在数字域(数字频率-数字频率变换)进行的,设计过程为:先将数字滤波器的设计指标转换成与数字滤波器同型的模拟滤波器的指标,再转换成模拟低通滤波器的指标,然后设计模拟低通原型滤波器(这个过程与模拟域频率变换法设计滤波器完全相同),再转换成数字低通滤波器,最后通过数字域频率变换方法转换成希望的数字滤波器(数字低通、高通、带通和带阻滤波器),这部分与模拟频率域变换法不同,所谓数字域频率变换是指,模拟低通原型设计完成后,直接转换成数字原型低通滤波器,通过数字域频率变换,将数字低通转换成各类数字滤波器(数字域频率变换是指数字低通通过数字频率-数字频率变换转换成各类数字滤波器)。

无论是模拟频率域法设计,还是数字频率域法设计,对于同一滤波器的设计,其结果是相同的。

最后给出了无限长脉冲响应数字滤波器在 MATLAB 环境下的设计实例。包括用冲激响应不变法和双线性变换法的离散化实例,巴特沃斯模拟低通、高通和数字滤波器的仿真设计。

习题 5

基础习题

5-1 简答题。

- (1) 简述滤波器的基本概念。
- (2) 简述数字滤波器的基本概念,并概述其分类。
- (3) 简述模拟低通的技术指标主要有哪些。
- (4) 简述数字低通的技术指标主要有哪些。
- (5) 概述以模拟滤波器设计为基础的 IIR 数字滤波器的主要的设计方法是什么。
- (6) 简述巴特沃斯低通滤波器的幅度特点与滤波器阶数 N 的关系,要求画巴特沃斯低通滤波器的幅频特性并说明。
- (7) 巴特沃斯模平方函数为 $|H_a(j\Omega)|^2 = H_a(s)H_a(-s)$, 概述极点分布的规律 (N 为偶、奇分开叙述)。
- (8) 试写出通带最大衰减和阻带最小衰减的计算公式。
- (9) 试写出归一化原型模拟低通滤波器的阶数计算公式。
- (10) 概述冲激响应不变法设计滤波器适用的范围、注意的问题及优缺点。
- (11) 概述双线性变换法设计滤波器适用的范围、注意的问题及优缺点。
- (12) 简述归一化模拟巴特沃斯低通滤波器的设计步骤。
- (13) 概述模拟域频率变换法设计 IIR 数字滤波器的主要步骤。
- (14) 概述数字域频率变换法设计 IIR 数字滤波器的主要步骤。
- (15) 概述模拟域频率变换法设计 IIR 数字滤波器和数字域频率变换法设计 IIR 数字滤波器步骤的相同点与不同点。

5-2 已知模拟滤波器的系统函数为

$$(1) H_a(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 3}; \quad (2) H_a(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1};$$

试用冲激响应不变法和双线性变换法将模拟滤波器的系统函数离散化成数字滤波器的系统函数(设抽样周期为 T)。

5-3 试用查表法设计 3 阶巴特沃斯归一化模拟原型低通滤波器。

5-4 试用查表法设计 4 阶巴特沃斯归一化模拟原型低通滤波器。

5-5 设模拟滤波器的系统函数为 $H_a(s) = \frac{s+a}{(s+b)^2 + b^2}$, 若模拟滤波器的系统函数是稳定的, 试用

冲激响应不变法和双线性变换法将模拟滤波器的系统函数离散化成数字滤波器的系统函数(设抽样周期为 T)。

5-6 已知模拟滤波器的系统函数为 $H_a(s) = \frac{1}{s+a}$, 设模拟滤波器的系统函数是稳定的。

(1) 试用冲激响应不变法和双线性变换法将模拟滤波器的系统函数离散化成数字滤波器的系统函数(设抽样周期为 T)。

(2) 若 $H_a(s) = \frac{s}{s+a}$, 能否用冲激响应不变法将模拟滤波器的系统函数离散化成数字滤波器的系统函数? 为什么?

5-7 试设计模拟低通滤波器, 要求技术指标:

- (1) 通带、阻带截止频率分别为 $f_p = 5\text{kHz}$, $f_s = 10\text{kHz}$;
 (2) 通带最大衰减和阻带最小衰减分别为 $R_p = 3\text{dB}$, $R_s = 25\text{dB}$ 。

试求出归一化模拟低通的系统函数和去归一化的系统函数 (实际的系统函数)。要求通带、阻带幅度特性单调。

5-8 试设计模拟高通滤波器, 要求技术指标:

- (1) 通带、阻带截止频率分别为 $f_p = 15\text{kHz}$, $f_s = 10\text{kHz}$;
 (2) 通带最大衰减和阻带最小衰减分别为 $R_p = 3\text{dB}$, $R_s = 20\text{dB}$ 。

试求出模拟高通的系统函数。要求通带、阻带幅度特性单调。

5-9 试设计模拟带通滤波器。要求通带范围为 $150\sim 250\text{Hz}$, 在此两频率处衰减不大于 3dB , 在 $80\sim 450\text{Hz}$ 频率范围内衰减不得小于 20dB 。试求出模拟带通的系统函数, 要求通带、阻带幅度特性单调。

综合习题

5-10 已知数字低通滤波器的指标为: 通带最大衰减 $R_p = 2\text{dB}$, 阻带最小衰减 $R_s = 10\text{dB}$, 通带截止频率为 $0.15\pi \text{ rad}$, 阻带截止频率为 $0.25\pi \text{ rad}$ 。试用冲激响应不变法设计数字低通滤波器, 要求通带、阻带幅度特性单调, 抽样周期 $T = 0.001\text{s}$ 。

5-11 已知数字低通滤波器的指标为: 通带最大衰减 $R_p = 1\text{dB}$, 阻带最小衰减 $R_s = 20\text{dB}$, 通带截止频率为 $0.15\pi \text{ rad}$, 阻带截止频率为 $0.25\pi \text{ rad}$ 。试用双线性变换法设计数字低通滤波器, 要求通带、阻带幅度特性单调, 抽样周期 $T = 0.001\text{s}$ 。

5-12 已知高通数字滤波器的指标为: 通带最大衰减 $R_p = 3\text{dB}$, 阻带最小衰减 $R_s = 25\text{dB}$; 通带截止频率 $f_{ph} \geq 6\text{kHz}$, 阻带截止频率为 $f_{sh} \leq 3\text{kHz}$; 抽样频率 $f_s = 20\text{kHz}$ 。试用双线性变换法设计数字高通滤波器, 要求通带、阻带幅度特性单调。

5-13 已知数字带通滤波器的指标为: 通带最大衰减 $R_p = 3\text{dB}$, 阻带最小衰减 $R_s = 20\text{dB}$; 通带范围为 $0.2\sim 0.4\pi$; 阻带范围为 $0\sim 0.1\pi$ 和 $0.5\pi\sim \pi$ 。试设计数字带通滤波器, 要求通带、阻带幅度特性单调。

5-14 给定数字低通滤波器的系统函数为 $H_{\text{dLP}}(\bar{z}) = \frac{0.0565(1+\bar{z})^2}{z^2 - 0.668\bar{z} + 0.2146}$, 试设计如下数字滤波器:

- (1) 数字低通通带截止频率 $\omega'_c = 0.2\pi$, 求通带截止频率 $\omega_c = 0.6\pi$ 的数字高通滤波器;
 (2) 数字低通通带截止频率 $\omega'_c = 0.1\pi$, 求通带截止频率 $\omega_c = 0.4\pi$ 的数字高通滤波器。

5-15 给定数字低通的系统函数 $H_{\text{dLP}}(\bar{z}) = \frac{0.0565(1+\bar{z})^2}{z^2 - 0.668\bar{z} + 0.2146}$, 抽样频率 $f_s = 8\text{kHz}$, 且数字低通通带截止频率 $f'_c = 2\text{kHz}$, 利用数字频率到数字频率变换方法, 设计下列数字滤波器:

- (1) 设计数字带通滤波器, 要求上、下限截止频率分别为 $f_1 = 1\text{kHz}$, $f_2 = 2\text{kHz}$;
 (2) 设计数字带阻滤波器, 要求带阻滤波器下、上限截止频率分别为 $f_1 = 1\text{kHz}$, $f_2 = 2\text{kHz}$;
 (3) 设计数字高通滤波器, 要求截止频率 $f = 1\text{kHz}$ 。

第6章 有限长单位脉冲响应(FIR)数字滤波器的设计



学习重点

- ★ 掌握 FIR 数字滤波器具有线性相位的条件。
- ★ 了解线性相位 FIR 数字滤波器的幅度特点及零点分布特点。
- ★ 掌握 FIR 数字滤波器窗函数设计法的基本原理和设计步骤。
- ★ 了解窗函数选取的基本原则。
- ★ 了解 FIR 数字滤波器和 IIR 数字滤波器的优、缺点。

6.1 线性相位 FIR 滤波器的含义与特点

在本书第5章中数字滤波器的频率响应表示为 $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\theta(\omega)}$ 。为了方便研究问题, 在本章中将数字滤波器的频率响应表示为 $H(e^{j\omega}) = H(\omega)e^{j\theta(\omega)}$, 其中幅度特性为 $H(\omega)$, 而相位特性为 $\theta(\omega)$ 。注意, 这里的幅度特性 $H(\omega)$ 不同于 $|H(e^{j\omega})|$, $H(\omega)$ 为 ω 的实函数, 可能取负值, 而 $|H(e^{j\omega})|$ 总是正值。

所谓线性相位, 就是指数字滤波器的相位特性 $\theta(\omega)$ 与频率 ω 呈严格线性关系, 即满足 $\theta(\omega) = -\alpha\omega$ 或 $\theta(\omega) = -\alpha\omega + \beta$ (其中 α 和 β 均为常数)。显然线性相位滤波器的相位特性曲线是一条斜率为常数 $-\alpha$ 的直线。有时也可采用群延时时对相位特性进行描述, 群延时的定义是相位对 ω 一阶导数的负值。当群延时是常数时, 即 $-\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} = \alpha$ 也作为线性相位的标志。

6.1.1 线性相位系统的时域特点

设 FIR 数字滤波器的单位脉冲响应为 $h(n)$, 其长度为有限长, 设 $h(n)$ 的长度为 N 。实际中的序列均为实因果序列, 因此自变量 n 的取值范围为 $[0, N-1]$ 。

离散系统满足什么样的时域条件时, 该系统才具有线性相位的特点呢? 这里不做过多的理论推导, 仅举两个特例进行分析。

1. 若 $h(n)$ 关于中心 $n = \frac{N-1}{2}$ 偶对称, 即 $h(n) = h(N-n-1)$, 此时, 系统函数

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} h(N-n-1)z^{-n}, \quad \text{令 } m = N-n-1$$

则

$$H(z) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)z^{-(N-m-1)} = z^{-(N-1)} \sum_{m=0}^{N-1} h(m)z^m = z^{-(N-1)} H(z^{-1})$$

因此得到

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{2} [H(z) + z^{-(N-1)} H(z^{-1})] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) [z^{-n} + z^{-(N-1)} z^n] \\ &= z^{-\left(\frac{N-1}{2}\right)} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \left(\frac{1}{2} \left[z^{-n+\left(\frac{N-1}{2}\right)} + z^{n-\left(\frac{N-1}{2}\right)} \right] \right) \end{aligned}$$

频率响应

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \left[\left(n - \frac{N-1}{2} \right) \omega \right]$$

幅度特性

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \left[\left(n - \frac{N-1}{2} \right) \omega \right]$$

相位特性

$$\theta(\omega) = -\frac{N-1}{2} \omega \quad (\alpha = \frac{N-1}{2}, \beta = 0)$$

显然上述 $\theta(\omega)$ 是线性的, 因此得到如下结论: 若 FIR 系统的单位脉冲响应 $h(n)$ 关于中心偶对称, 则该系统具有线性相位特性, 此时称该系统为第一类线性相位系统。

2. 若 $h(n)$ 关于中心 $\frac{N-1}{2}$ 奇对称, 即 $h(n) = -h(N-n-1)$, 此时, 系统函数

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} -h(N-n-1) z^{-n}, \quad \text{令 } m = N-n-1$$

$$H(z) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m) z^{-(N-m-1)} = -z^{-(N-1)} \sum_{m=0}^{N-1} h(m) z^m = -z^{-(N-1)} H(z^{-1})$$

推导过程与前述 $h(n)$ 偶对称情况类似, 差别在于此处 $z^{-(N-1)} H(z^{-1})$ 的符号为负, 因此可以得到

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{2} [H(z) - z^{-(N-1)} H(z^{-1})] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) [z^{-n} - z^{-(N-1)} z^n] \\ &= z^{-\left(\frac{N-1}{2}\right)} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \left(\frac{1}{2} \left[z^{-n+\left(\frac{N-1}{2}\right)} - z^{n-\left(\frac{N-1}{2}\right)} \right] \right) \end{aligned}$$

频率响应

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = -je^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \left[\left(n - \frac{N-1}{2} \right) \omega \right]$$

幅度特性

$$H(\omega) = -\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \left[\left(n - \frac{N-1}{2} \right) \omega \right]$$

相位特性

$$\theta(\omega) = -\frac{N-1}{2} \omega + \frac{\pi}{2} \quad (\alpha = \frac{N-1}{2}, \beta = \frac{\pi}{2})$$

同样可以得到如下结论: 若 FIR 系统的单位脉冲响应 $h(n)$ 关于中心奇对称, 则该系统也具有线性相位特性, 此时称该系统为第二类线性相位系统。

要点一: FIR 滤波器满足 $h(n) = h(N-n-1)$ 时, 称为第一类线性相位滤波器 (系统)。

要点二: FIR 滤波器满足 $h(n) = -h(N-n-1)$ 时, 称为第二类线性相位滤波器 (系统)。

6.1.2 线性相位系统的幅度特点

当 $h(n)$ 为偶对称和奇对称时, 滤波器幅度函数有两种特性。而当 N 的取值为偶数和奇数时, 滤波器的幅度特性也不同, 因而共有 4 种不同的幅度特性, 下面分别进行讨论。

1. $h(n)$ 偶对称, N 为奇数

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \left[\left(n - \frac{N-1}{2} \right) \omega \right]$$

由于 N 为奇数, 中间项 $n = \frac{N-1}{2}$, $\cos \left[\left(n - \frac{N-1}{2} \right) \omega \right] = 1$

其余项偶对称。

所以
$$H(\omega) = h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} 2h(n) \cos \left[\left(n - \frac{N-1}{2} \right) \omega \right]$$

令
$$a(0) = h\left(\frac{N-1}{2}\right), \quad a(n) = 2h\left(\frac{N-1}{2} - n\right) \quad n = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}$$

则
$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} a(n) \cos \omega n$$

显然, $H(\omega)$ 关于 $\omega=0, \pi, 2\pi$ 偶对称, 如图 6-1 所示, 可实现任意形式的滤波器 (低通、高通、带通、带阻)。

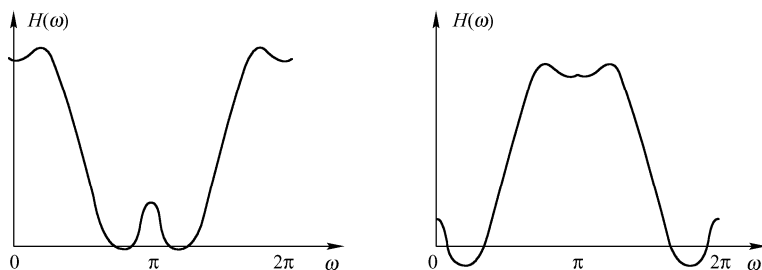


图 6-1 $h(n)$ 偶对称、 N 为奇数时的幅度特性举例

2. $h(n)$ 偶对称, N 为偶数

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \left[\left(n - \frac{N-1}{2} \right) \omega \right]$$

由于 N 为偶数, 无单独中间项, 所有项均可两两合并

令

$$m = \frac{N}{2} - n$$

则

$$H(\omega) = \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}} 2h\left(\frac{N}{2} - m\right) \cos \left[\left(\frac{1}{2} - m \right) \omega \right]$$

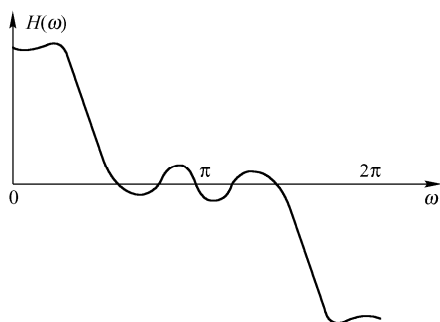
令

$$b(n) = 2h\left(\frac{N}{2} - n\right) \quad n = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$$

则

$$H(\omega) = \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} b(n) \cos \left[\left(\frac{1}{2} - n \right) \omega \right]$$

显然 $H(\omega)$ 关于 $\omega=0, 2\pi$ 偶对称, 关于 $\omega=\pi$ 奇对称, 如图 6-2 所示, 可以实现低通和带通滤波器, 但不能实现高通和带阻滤波器。

图 6-2 $h(n)$ 偶对称、 N 为偶数时的幅度特性举例

3. $h(n)$ 奇对称, N 为奇数

经过推导, 可得到 $H(0)=H(\pi)=H(2\pi)=0$ 。 $H(\omega)$ 关于 $\omega=0, \pi, 2\pi$ 奇对称, 因此只能实现带通滤波器, 不能实现低通、高通和带阻滤波器。

4. $h(n)$ 奇对称, N 为偶数

经过推导, 可得到 $H(0)=H(2\pi)=0$ 。 $H(\omega)$ 关于 $\omega=0, 2\pi$ 奇对称, 关于 $\omega=\pi$ 偶对称, 因此只能实现高通和带通滤波器, 不能实现低通和带阻滤波器。

要点三: $h(n)$ 偶对称, N 为奇数, 可实现低通、高通、带通和带阻滤波特性。

要点四: $h(n)$ 偶对称, N 为偶数, 可实现低通和带通滤波特性。

要点五: $h(n)$ 奇对称, N 为奇数, 可实现带通滤波特性。

要点六: $h(n)$ 奇对称, N 为偶数, 可实现高通和带通滤波特性。

6.1.3 线性相位 FIR 数字滤波器零点分布的特点

下面简单分析一下, 若 FIR 滤波器满足线性相位的条件, 其系统函数 $H(z)$ 的零点分布有何特点和规律。由 6.1.1 节中的结论可知, 当脉冲响应 $h(n)$ 满足奇对称和偶对称的条件时, 该 FIR 滤波器为线性相位,

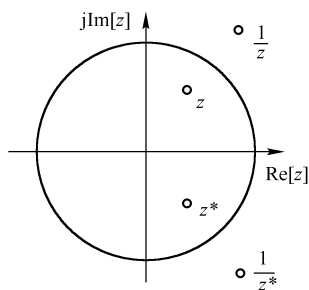


图 6-3 线性相位 FIR 滤波器的零点分布

此时 $h(n)=h(N-n-1)$ 或 $h(n)=-h(N-n-1)$ 。经推导可知, 系统函数 $H(z)$ 应满足 $H(z)=z^{-(N-1)}H(z^{-1})$ 或 $H(z)=-z^{-(N-1)}H(z^{-1})$ 。

当某点 z_i 为 $H(z)$ 的零点时 (即当 $z=z_i$ 时, $H(z_i)=z_i^{-(N-1)}H(z_i^{-1})=0$), 显然其倒数 $z=1/z_i$ 满足 $H(1/z_i)=z_i^{N-1}H(z_i)=0$, 即 $z=1/z_i$ 亦为其零点。

若 $h(n)$ 为实数序列, 其零点必为共轭的, 即 z_i 为 $H(z)$ 的零点时, 其共轭 $z=z_i^*$ 也应为其零点, 同时其倒数 $z=1/z_i^*$ 也为其零点。

如图 6-3 所示, 若系统为 FIR 线性相位滤波器, 且已知其一个零点 z_i , 则另外三个零点也随之确定, 即 $z=1/z_i$ 、 $z=z_i^*$ 和 $z=1/z_i^*$ 也全部为其零点。

要点七: 若 z_i 为线性相位 FIR 数字滤波器的零点, 则 $1/z_i$ 、 z_i^* 和 $1/z_i^*$ 也为其零点。

6.2 FIR 数字滤波器的线性相位结构

在第 2 章中给出了 FIR 滤波器的几种基本结构, 主要有以下几种: 直接型、级联型和频率抽样型。这里将要重点介绍 FIR 滤波器的另外一种基本结构形式——线性相位结构。

FIR 滤波器的线性相位结构有偶对称和奇对称两种情况, 分别讨论如下。

1. $h(n)$ 偶对称时

若 N 为偶数, 则系统函数为

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)z^{-n} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} h(n)z^{-n} \\
 &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)z^{-n} + \sum_{n'=\frac{N}{2}-1}^0 h(N-1-n')z^{-(N-1-n')} \\
 &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)z^{-n} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(N-1-n)z^{-(N-1-n)} \\
 &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)[z^{-n} + z^{-(N-1-n)}]
 \end{aligned}$$

若 N 为奇数, 则系统函数为

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = h\left(\frac{N-1}{2}\right)z^{-\left(\frac{N-1}{2}\right)} + \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} h(n)[z^{-n} + z^{-(N-1-n)}]$$

根据以上推导, 可以得到 $h(n)$ 偶对称时系统的线性相位结构流图, 如图 6-4 所示。

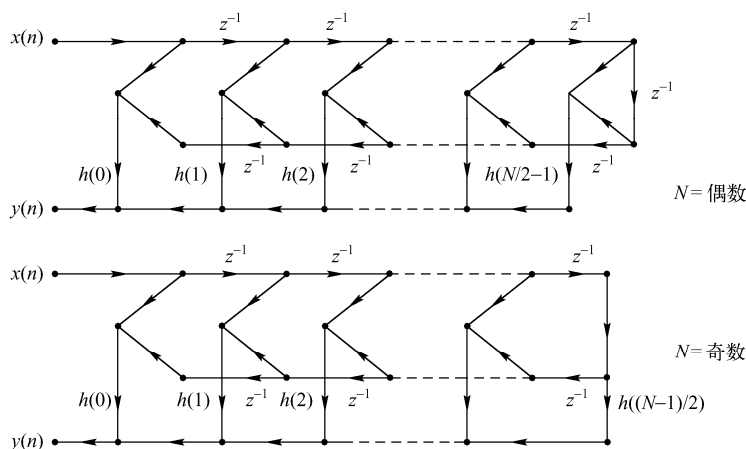


图 6-4 $h(n)$ 偶对称时系统的线性相位结构流图

2. $h(n)$ 奇对称时

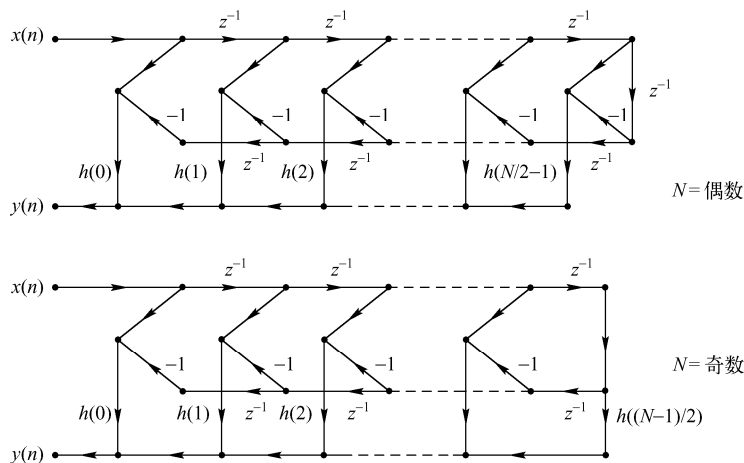
若 N 为偶数, 则系统函数为

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)[z^{-n} - z^{-(N-1-n)}]$$

若 N 为奇数, 则系统函数为

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n)[z^{-n} - z^{-(N-1-n)}] + h\left(\frac{N-1}{2}\right)z^{-\frac{N-1}{2}}$$

类似地, 可以得到 $h(n)$ 奇对称时系统的线性相位结构流图, 如图 6-5 所示。

图 6-5 $h(n)$ 奇对称时系统的线性相位结构流程图

【例 6-1】 设某 FIR 数字滤波器的系统函数为

$$H(z) = \frac{1}{5}(1 + 3z^{-1} + 5z^{-2} + 3z^{-3} + z^{-4})$$

试画出此滤波器的线性相位结构。

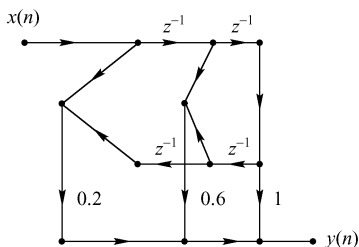


图 6-6 FIR 线性相位结构的实例

解: 由题中所给条件可知

$$h(n) = \frac{1}{5}\delta(n) + \frac{3}{5}\delta(n-1) + \delta(n-2) + \frac{3}{5}\delta(n-3) + \frac{1}{5}\delta(n-4)$$

$$h(0) = h(4) = \frac{1}{5} = 0.2$$

$$h(1) = h(3) = \frac{3}{5} = 0.6$$

$$h(2) = 1$$

该系统的线性相位结构如图 6-6 所示。

6.3 用窗函数法设计 FIR 数字滤波器

在时域把理想 FIR 数字滤波器的单位脉冲响应用 $h_d(n)$ 表示, 由于其频域波形具有矩形的理想特性, 导致 $h_d(n)$ 为非因果序列且其时域长度为无限大, 显然无法物理实现。因此必须对 $h_d(n)$ 进行截取处理, 得到长度有限的序列 $h(n)$ 。由于 $h(n)$ 是将 $h_d(n)$ 截取后得到的序列, 显然两者具有相似性, 因此用可物理实现的有限长度序列 $h(n)$ 来逼近无限长度的理想滤波器 $h_d(n)$ 的特性, 作为实际滤波器的单位脉冲响应。

因为对理想特性 $h_d(n)$ 的截取操作, 在算法上是用某函数 (一般称为窗函数) 与其相乘得到 $h(n)$ 的, 这种操作在时域波形上类似于对长度为无限大的序列 $h_d(n)$ 进行一个“加窗”截取的处理过程, 因此该设计方法被称为 FIR 滤波器的窗函数设计法, 简称为窗函数法。

下面以低通滤波器为例, 说明窗函数法的设计原理和设计步骤。

窗函数法的设计思想是从时域出发的, 首先确定理想低通滤波器的频率响应函数为 $H_d(e^{j\omega})$, 根据理想低通滤波器的定义, 在区间 $[0, \pi]$ 内有

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\alpha\omega} & 0 < |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases} \quad (\alpha \text{ 表示其群时延, } \omega_c \text{ 为截止频率})$$

根据序列傅里叶变换的周期性可知, $H_d(e^{j\omega})$ 是以 2π 为周期的连续函数, 在一个周期内的幅频特性曲线如图 6-7 所示。

理想低通滤波器的单位脉冲响应 $h_d(n)$ 为频率响应 $H_d(e^{j\omega})$ 的傅里叶反变换, 即

$$\begin{aligned} h_d(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\alpha\omega} e^{jn\omega} d\omega \\ &= \frac{\sin[(n-\alpha)\omega_c]}{\pi(n-\alpha)} = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin[(n-\alpha)\omega_c]}{\omega_c(n-\alpha)} \end{aligned}$$

显然 $h_d(n)$ 的长度为无限长, 应对其进行截断处理, 这个过程相当于用窗函数 $w(n)$ 与之相乘, 为便于计算和处理, 这里设窗函数为矩形序列, 其长度为 N , 即 $w(n) = R_N(n)$, 如图 6-8 所示。

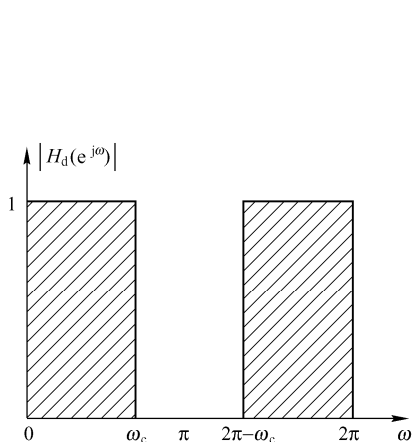


图 6-7 理想低通滤波器的幅频特性

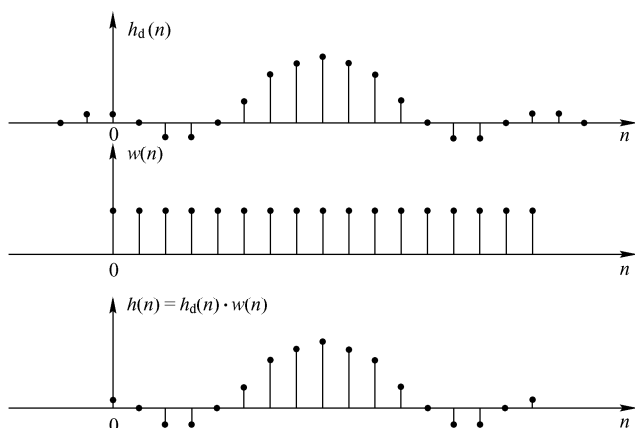


图 6-8 对理想滤波器的单位冲激响应进行加窗处理

下面分析理想滤波器加窗后对频率响应有哪些影响。

对于矩形窗 $R_N(n)$, 其频率响应如下

$$W(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-jn\omega} = \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} = W_R(\omega) e^{-j\omega \alpha}$$

其中

$$W_R(\omega) = \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}}, \quad \alpha = \frac{N-1}{2}$$

对理想低通滤波器, 其频率响应为

$$H_d(e^{j\omega}) = H_d(\omega) e^{-j\alpha\omega}, \quad \alpha = \frac{N-1}{2}$$

由傅里叶变换的卷积定理, 得实际滤波器的响应为

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= H_d(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta) e^{-j\alpha\theta} W_R(\omega - \theta) e^{-j(\omega - \theta)\alpha} d\theta \\ &= e^{-j\omega\alpha} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta) W_R(\omega - \theta) d\theta \\ &= e^{-j\omega\alpha} H(\omega) \end{aligned}$$

其中, 实际滤波器的相位响应为 $e^{j\omega\alpha}$, 显然为线性相位。而实际滤波器的幅度响应为

$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta) W_R(\omega - \theta) d\theta$$

显然加窗后实际滤波器的幅度响应特性 $H(\omega)$ 可以看成是窗函数频谱 $W_R(\omega)$ 与理想低通滤波器 $H_g(\omega)$ 在频域的卷积过程, 如图 6-9 所示。

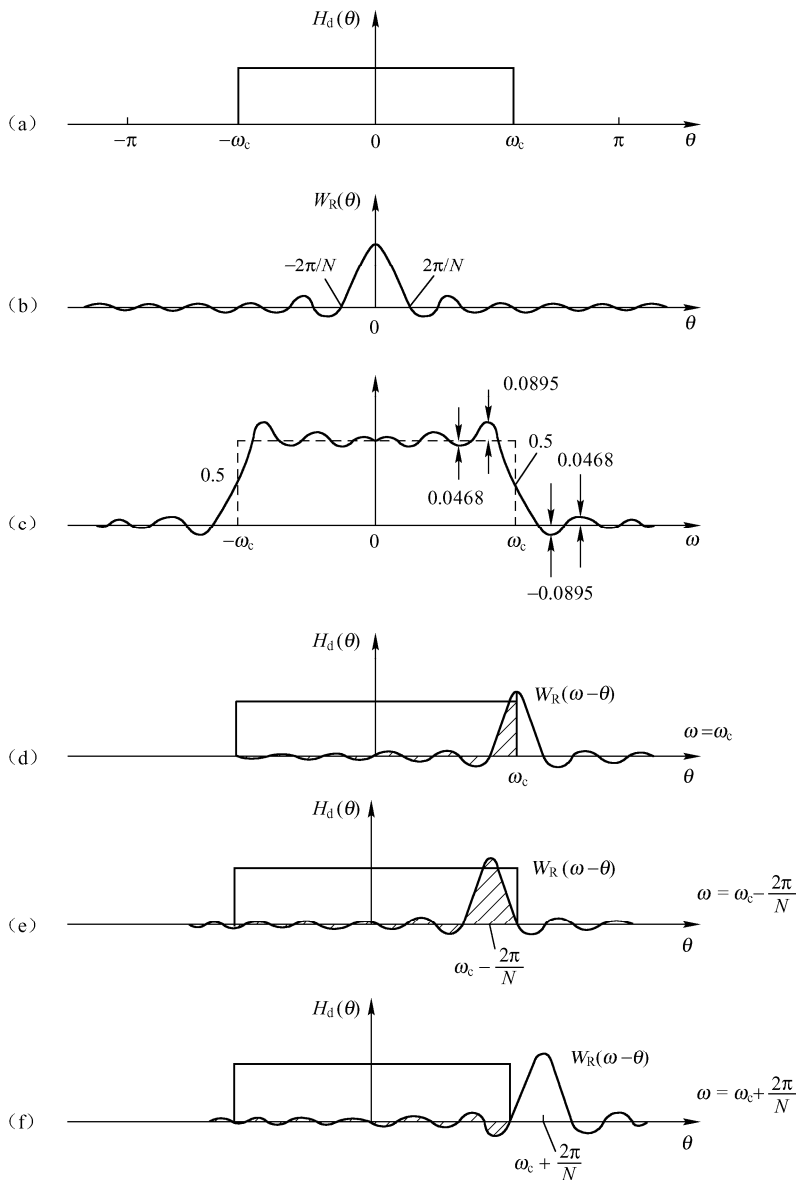


图 6-9 加窗处理对频率响应的影响

图中窗函数频谱 (简称窗谱) $W_R(\theta)$ 在区间 $\left[-\frac{2\pi}{N}, \frac{2\pi}{N}\right]$ 的部分称为“主瓣”, 主瓣两侧较小的波动称为“旁瓣”。旁瓣中对卷积积分结果影响较大的是主瓣两侧面积最大的两个旁瓣, 均称为“第一旁瓣”。

下面取 4 个特殊频率点来简要分析卷积结果。

(1) 当 $\omega = 0$ 时, $H(0)$ 等于 $W_R(\theta)$ 在 $[-\omega_c, \omega_c]$ 范围内的积分面积。因一般 $\omega_c \gg \frac{2\pi}{N}$, 故 $H(0)$ 近似为 $W_R(\theta)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 范围内的积分面积。

(2) 当 $\omega = \omega_c$ 时, 窗谱 $W_R(\theta)$ 的一半与 $H_d(\theta)$ 重叠, 因此 $H(\omega_c) = 0.5H(0)$ 。

(3) $\omega = \omega_c - \frac{2\pi}{N}$ 时, 第一旁瓣(负数)在通带外, 旁瓣的影响最小, $H(\omega)$ 出现正肩峰(最大值)。

(4) $\omega = \omega_c + \frac{2\pi}{N}$ 时, 第一旁瓣(负数)在通带内, 旁瓣的影响最大, $H(\omega)$ 出现负肩峰(最小值)。

由以上分析可知, 加窗处理将会对理想滤波器的频率响应产生以下几点影响。

① 使理想频率特性不连续点处边沿加宽, 形成一个过渡带, 其宽度等于窗的频率响应的主瓣宽度。

② 在截止频率两边的地方即过渡带的两边, 出现最大的肩峰值, 肩峰的两侧形成起伏振荡, 其振荡幅度取决于旁瓣的相对幅度, 而振荡的多少则取决于旁瓣的多少。

③ 改变窗函数的长度 N 值, 只能改变窗谱的主瓣宽度, 并不能改变主瓣与旁瓣的相对比例。实际滤波器的幅度函数在通带和阻带都呈现出振荡现象, 且最大波纹大约为幅度的 9%, 这个现象称为吉布斯效应。为了消除吉布斯效应, 降低通带和阻带内的振荡幅度, 一般的解决方法是采用其他类型的窗函数, 如三角形窗、汉宁窗等, 可避免过大的振荡幅度, 以满足滤波器的技术指标要求。窗函数设计法的主要任务之一, 是选取合适的窗函数, 减小波动, 使实际滤波器的频率响应尽量接近理想滤波器的频率响应特性。

在设计 FIR 数字滤波器时, 为得到满足技术指标要求的滤波性能, 通常要求窗函数有如下特性: 一是窗函数的主瓣宽度足够窄, 以获得较陡峭的过渡带特性; 二是窗函数的旁瓣足够小, 以降低吉布斯效应的影响, 从而改善通带内的平稳度和增大阻带内的衰减。

在实际的滤波器设计过程中, 常采用的典型窗函数有如下 5 种。

(1) 矩形窗 (Rectangle Window)

$$w(n) = R_N(n)$$

其频率响应为

$$W(e^{j\omega}) = \frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega \frac{N-1}{2}}$$

幅度响应为

$$W_R(\omega) = \frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)}$$

主瓣宽度为

$$4\pi/N$$

过渡带宽度为

$$\Delta\omega = 0.9 \times 2\pi/N$$

(2) 三角窗 (Bartlett Window)

$$w(n) = \begin{cases} \frac{2n}{N-1} & 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{N-1} & \frac{N-1}{2} \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

其频率响应为

$$W(e^{j\omega}) = \frac{2}{N} \left[\frac{\sin(N\omega/4)}{\sin(\omega/2)} \right]^2 e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \quad (N \gg 1)$$

主瓣宽度为

$$8\pi/N$$

(3) 汉宁 (Hanning) 窗 (又称为升余弦窗)

$$w(n) = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{2n\pi}{N-1} \right) \right] R_N(n)$$

频率响应为

$$W(e^{j\omega}) = \left\{ 0.5W_R(\omega) + 0.25 \left[W_R \left(\omega - \frac{2\pi}{N-1} \right) + W_R \left(\omega + \frac{2\pi}{N-1} \right) \right]^2 \right\} e^{-j \left(\frac{N-1}{2} \right) \omega}$$

(4) 海明 (Hamming) 窗 (又称为改进的升余弦窗)

$$w(n) = \left[0.54 - 0.46 \cos \left(\frac{2n\pi}{N-1} \right) \right] R_N(n)$$

幅度响应为

$$W(\omega) = 0.54W_R(\omega) + 0.23 \left[W_R \left(\omega - \frac{2\pi}{N-1} \right) + W_R \left(\omega + \frac{2\pi}{N-1} \right) \right] \quad (N \gg 1)$$

(5) 布莱克曼 (Blackman) 窗 (又称为二阶升余弦窗)

$$w(n) = \left[0.42 - 0.5 \cos \left(\frac{2n\pi}{N-1} \right) + 0.08 \cos \left(\frac{4n\pi}{N-1} \right) \right] R_N(n)$$

幅度响应为

$$W(\omega) = 0.42W_R(\omega) + 0.25 \left[W_R \left(\omega - \frac{2\pi}{N-1} \right) + W_R \left(\omega + \frac{2\pi}{N-1} \right) \right] + 0.04 \left[W_R \left(\omega - \frac{4\pi}{N-1} \right) + W_R \left(\omega + \frac{4\pi}{N-1} \right) \right]$$

上述 5 种常见窗函数的参数比较如表 6-1 所示。

表 6-1 5 种常见窗函数的参数比较

类型	旁瓣峰值/dB	过渡带宽度 $\Delta\omega/(2\pi/N)$	加窗后滤波器的阻带最小衰减 δ_s /dB
矩形窗	-13	0.9	-21
三角窗	-25	2.1	-25
汉宁窗	-31	3.1	-44
海明窗	-41	3.3	-53
布莱克曼窗	-57	5.5	-74

下面结合实例给出窗函数设计法的要点和步骤。

要点八：FIR 滤波器的窗函数法设计步骤：

- (1) 确定 FIR 滤波器的技术指标；
- (2) 根据技术指标确定理想滤波器的频率响应函数 $H_d(e^{j\omega})$ ；
- (3) 求出理想滤波器的单位冲激响应 $h_d(n) = \text{FT}^{-1}[H_d(e^{j\omega})]$ ；
- (4) 根据技术指标要求选择适当的窗函数并确定窗函数的长度 N ；
- (5) 对理想滤波器加窗得到实际滤波器的单位冲激响应 $h(n) = w(n) \cdot h_d(n)$ ；
- (6) 求实际滤波器的频率响应 $H(e^{j\omega}) = \text{FT}[h(n)]$ 并检验设计结果是否符合技术指标要求, 若不足, 须重新设计。

【例 6-2】 设计一个线性相位的 FIR 数字低通滤波器, 给定抽样频率 $f_s = 15\text{kHz}$, 通带截止频率 $\Omega_p = 2\pi \times 1.5 \times 10^3 \text{rad/s}$, 阻带截止频率 $\Omega_s = 2\pi \times 3 \times 10^3 \text{rad/s}$, 阻带衰减不小于 50dB。

解: 1. 确定数字滤波器的技术指标

通带截止频率: $\omega_p = \Omega_p T = 0.2\pi$

阻带截止频率: $\omega_s = \Omega_s T = 0.4\pi$

阻带最小衰减: $\delta_s = 50\text{dB}$

截止频率: $\omega_c = \frac{1}{2}(\omega_p + \omega_s) = \frac{1}{2}(0.2\pi + 0.4\pi) = 0.3\pi$

2. 确定理想低通滤波器频率响应

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\alpha\omega} & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

3. 理想低通滤波器冲激响应

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\alpha\omega} e^{jn\omega} d\omega = \frac{\sin[(n-\alpha)\omega_c]}{\pi(n-\alpha)}$$

为满足线性相位, 取 $\alpha = \frac{N-1}{2}$ 。

4. 确定窗函数及 FIR 滤波器长度 N

由阻带最小衰减 $\delta_s = 50\text{dB}$, 可选海明窗, 其阻带最小衰减 53dB, 由海明窗过渡带

$$\Delta\omega/(2\pi/N) = 3.3$$

求得窗函数的长度为

$$N = \frac{6.6\pi}{\Delta\omega} = \frac{6.6\pi}{\omega_s - \omega_p} = 33$$

$$\alpha = \frac{N-1}{2} = 16$$

5. 确定 FIR 滤波器的单位脉冲响应

因为海明窗函数序列为 $w(n) = \left[0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right] R_N(n)$, 所以 FIR 滤波器的单位脉冲响应为

$$h(n) = h_d(n) \cdot w(n) = \frac{\sin[0.3\pi(n-16)]}{\pi(n-16)} \times \left[0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right] R_N(n)$$

6. 检验设计结果是否符合要求

根据上一步设计出的 $h(n)$ 确定滤波器的幅频特性 $|H(e^{j\omega})|$, 并绘出其对数坐标曲线, 如图 6-10 所示, 显然该滤波器在阻带内的最小衰减不小于 50dB, 满足设计指标要求。

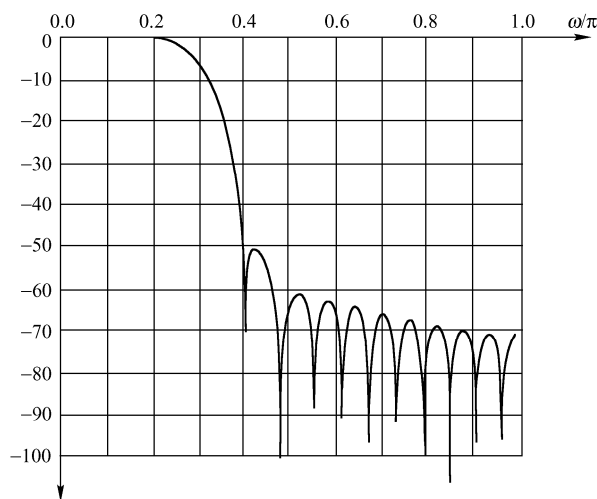


图 6-10 滤波器的对数幅频特性曲线

以上也可用 MATLAB 提供的 FIR 滤波器的设计函数完成设计, 程序如下。

```

wp=0.2*pi;
ws=0.4*pi;
DB=ws-wp;
No=ceil(6.6*pi/DB);
N=No+mod(No+1,2);
wc=(wp+ws)/2/pi;
hn=fir1(N-1,wc,hamming(N));
subplot(211);stem(hn);
Hw=fft(hn,512);
w=[0:511]*2/512;
subplot(212);
plot(w,20*log10(abs(Hw)));
grid on;
axis([0,max(w)/2,-100,5]);
xlabel('w/pi');ylabel('20log10(abs(Hw)/dB)');
grid on;

```

【例 6-3】 用 MATLAB 实现以下滤波器的设计：设计指标为 $N=33$ ， $\omega_c=\frac{\pi}{4}$ ，分别用 4 种窗函数设计线性相位低通滤波器，求出 $h(n)$ ，打印相应的幅频特性和相频特性曲线。

解：程序如下：

```

close all
i=0;
N=input('输入窗函数长度 N=(输入 0=退出)');
while(N~=0);
w=input('输入逼近理想低通滤波器的截止频率 wc=');
n=0:(N-1);
alpha=(N-1)/2;
m=n-alpha+eps;
hd=sin(w*m)./(pi*m); %得到理想低通滤波器
k=input('请选择窗函数类型(1=矩形; 2=汉宁; 3=海明; 4=布莱克曼):');
if k= =1
    B=boxcar(N);
    string=['Boxcar,N=',num2str(N)];
elseif k= =2
    B=hanning(N);
    string=['Hanning,N=',num2str(N)];
elseif k= =3
    B=hamming(N);
    string=['Hamming,N=',num2str(N)];
else
    B=blackman(N);
    string=['Blackman,N=',num2str(N)];
end
h=hd.*(B)'; %得到 FIR 数字滤波器
[H,m]=freqz(h,[1],1024,'whole'); %求其频率响应
db=20*log10(abs(H)+eps); %得到幅值
pha=angle(H); %得到相位
i=i+1;
figure(i);
subplot(2,2,1);
    stem(n,h,'.r');
    axis([0,N-1,-0.1,0.3]);
    xlabel('n');

```



```

ylabel('h(n)');
title('实际低通滤波器的 h(n)');
text((0.3*N),0.275,string);
subplot(2,2,2);
plot(m/pi,db,'m');
axis([0,1,-100,0]);
xlabel('w/pi');
ylabel('dB');
title('衰减特性(dB)');
grid;
subplot(2,2,3);
plot(m,pha);
hold on;
plot(0:4,zeros(5),'-k');
title('相频特性');
xlabel('频率(rad)');
ylabel('相位(rad)');
axis([0,3.15,-4,4]);
subplot(2,2,4);
plot(m,abs(H));
title('幅频特性');
xlabel('频率(rad)');
ylabel('幅值');
axis([0,3.15,0,1.5]);
text(0.9,1.3,string);
N=input('输入窗函数长度 N=(输入 0=退出)');
end

```

用矩形窗设计低通滤波器的运行结果如图 6-11 所示。

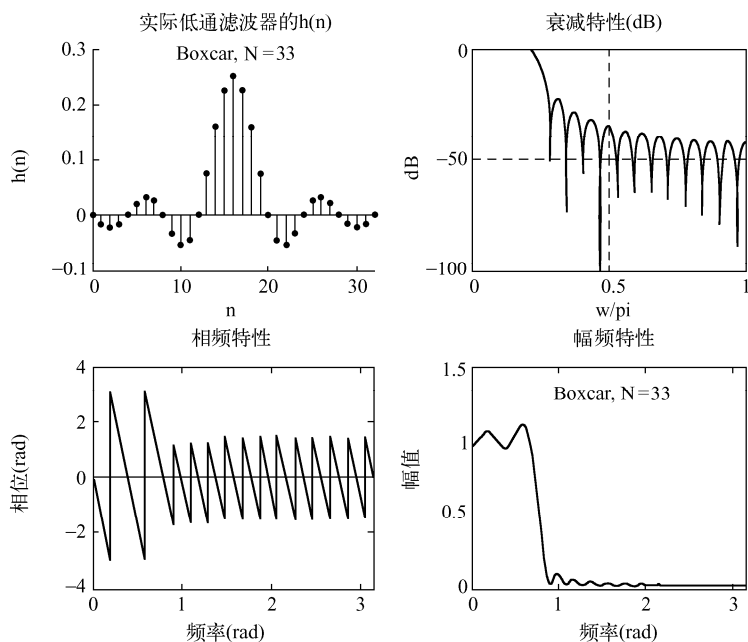


图 6-11 用矩形窗设计低通滤波器的运行结果

用汉宁窗设计低通滤波器的运行结果如图 6-12 所示。

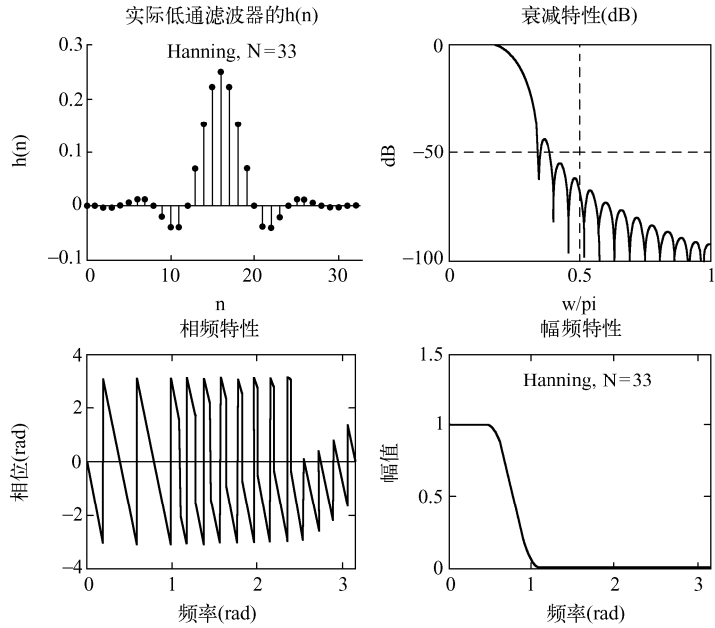


图 6-12 用汉宁窗设计低通滤波器的运行结果

用海明窗设计低通滤波器的运行结果如图 6-13 所示。

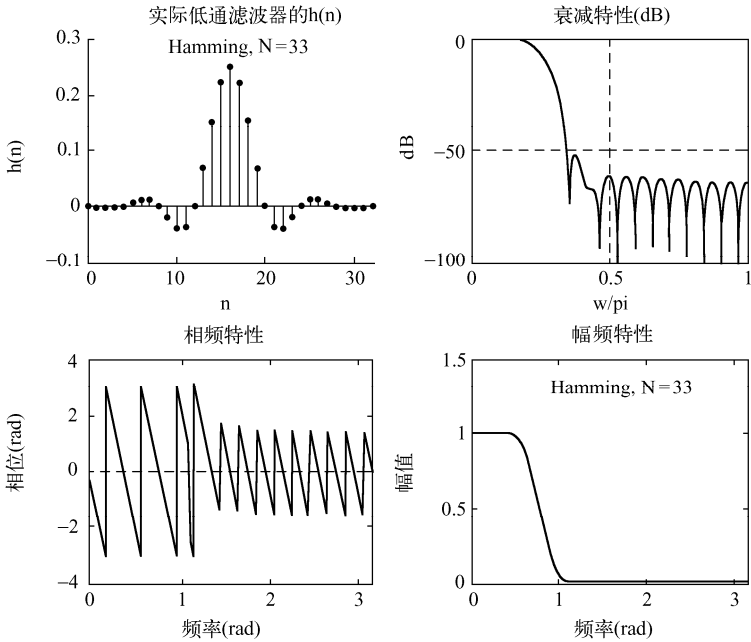


图 6-13 用海明窗设计低通滤波器的运行结果

用布莱克曼窗设计低通滤波器的运行结果如图 6-14 所示。

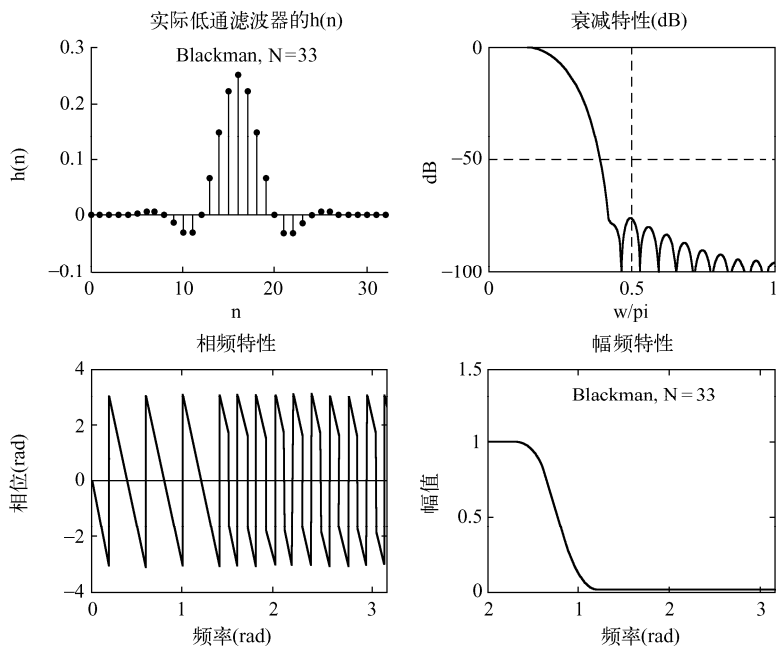


图 6-14 用布莱克曼窗设计低通滤波器的运行结果

【例 6-4】 利用 MATLAB 中的 FDATool 设计 FIR 低通滤波器。要求阶数为 $N=16$ ，截止频率 $f_c=10.8\text{kHz}$ ，抽样频率 $f_s=48\text{kHz}$ 。

MATLAB 集成了一套功能强大的滤波器设计工具 FDATool (Filter Design & Analysis Tool)，可以完成多种滤波器的设计、分析和性能评估。

在 MATLAB 的命令窗口中直接输入代码 FDATool，按回车键，便可打开 FDATool 的主界面，如图 6-15 所示。

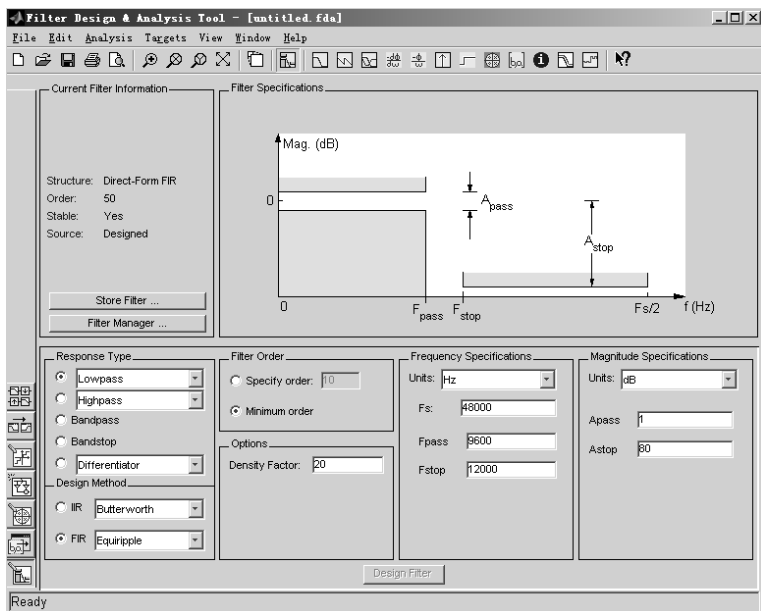


图 6-15 FDATool 的主界面

下面利用 FDATool 来设计以上滤波器, 过程如下。

FDATool 界面左下侧有一组工具按钮, 其功能分别如下所述:

- 滤波器转换 (Transform Filter)
- 设置量化参数 (Set Quantization Parameters)
- 实现模型 (Realize Model)
- 导入滤波器 (Import Filter)
- 多速率滤波器 (Multirate Filter)
- 零极点编辑器 (Pole-zero Editor)
- 设计滤波器 (Design Filter)

选择其中的按钮, 进入设计滤波器界面, 进行下列选择, 如图 6-16 所示。

滤波器类型 (Response Type) 为低通 (Lowpass); 设计方法 (Design Method) 为 FIR; 采用窗函数法 (Window); 滤波器阶数 (Specify order) 定制为 16; 窗口类型为 Kaiser; Beta 为 0.5; FS 为 48kHz; FC 为 10.8kHz。最后单击 Design Filter 按钮, 让 MATLAB 计算 FIR 滤波器系数并做相关分析。

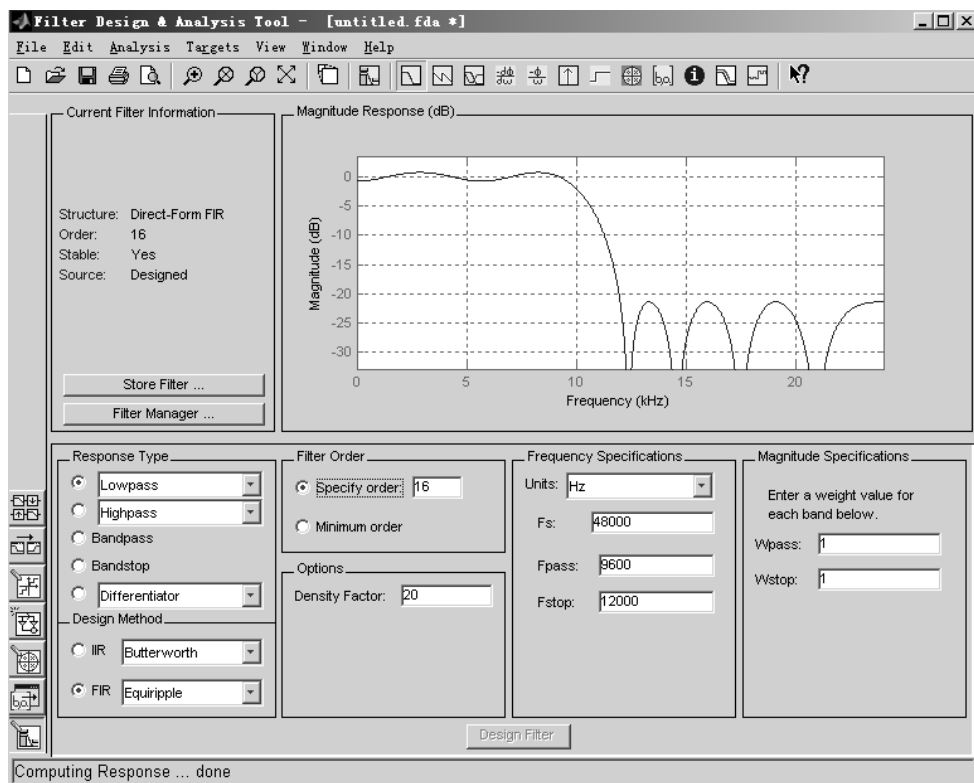


图 6-16 FDATool 设计 FIR 滤波器

计算完 FIR 滤波器系数以后, 往往需要对设计好的 FIR 滤波器进行相关的性能分析, 以便了解该滤波器是否满足设计要求。图 6-17、图 6-18、图 6-19、图 6-20 分别给出了滤波器的幅度响应、相位响应、单位脉冲响应和零、极点图。

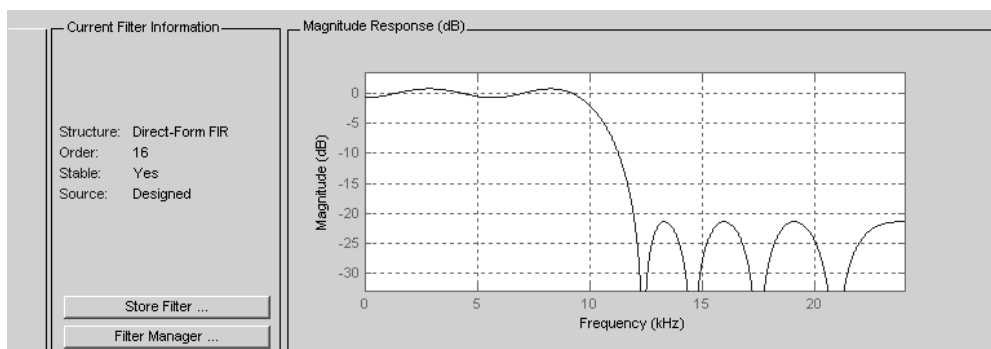


图 6-17 滤波器的幅度响应

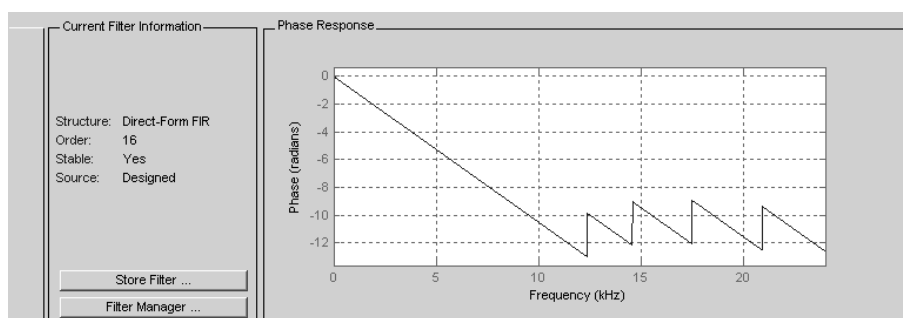


图 6-18 滤波器的相位响应

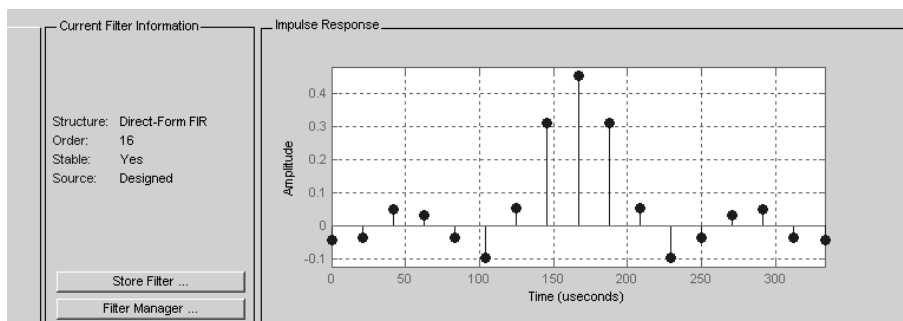


图 6-19 滤波器的单位脉冲响应

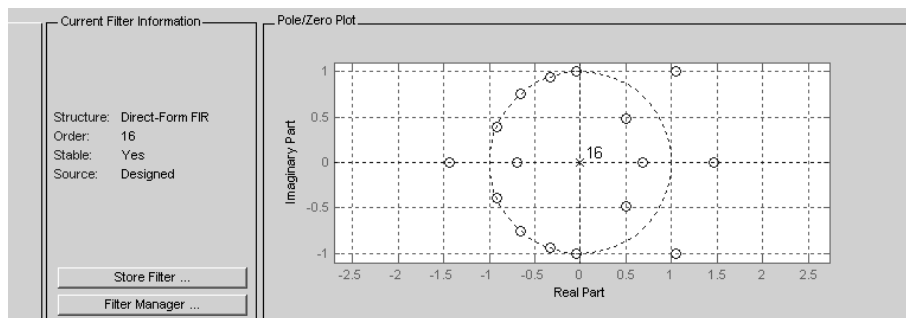


图 6-20 滤波器的零、极点图

6.4 IIR 滤波器与 FIR 滤波器的对比

前面已经介绍了 IIR 和 FIR 数字滤波器的设计方法，这两种滤波器各有优、缺点。为了能在实际工作中恰当地选用滤波器，现将两种滤波器的特点对比如下。

（1）选择数字滤波器必须考虑经济问题，通常将硬件的复杂性、芯片的面积或计算速度等作为衡量经济问题的因素。在相同的技术指标要求下，由于 IIR 数字滤波器存在输出对输入的反馈，因此可以用较少的阶数来满足要求，所用的存储单元少，运算次数少，较为经济。例如，用窗函数法设计一个阻带衰减为 20dB 的 FIR 数字滤波器，要 33 阶才能达到要求，而用双线性变换法只需 4~5 阶的切比雪夫 IIR 滤波器就可达到同样的技术指标。这就是说，FIR 滤波器的阶数要高 5~10 倍左右。

（2）在很多情况下，FIR 数字滤波器的线性相位与它的高阶数带来的额外成本相比是非常值得的。对于 IIR 滤波器，选择性越好，其相位的非线性就越严重。如果既要使 IIR 滤波器获得线性相位，又满足幅度滤波器的技术要求，必须加全通网络进行相位校正，这将大大增加滤波器的阶数。从这一点来看，FIR 滤波器优于 IIR 滤波器。

（3）FIR 滤波器主要采用非递归结构，因而无论是理论上还是在实际的有限精度运算中，它都是稳定的，有限精度运算误差也较小。IIR 滤波器必须采用递归结构，极点必须在 z 平面的单位圆内才能稳定。对于这种结构，运算中的舍入处理有时会引起寄生振荡。

（4）对于 FIR 滤波器，由于脉冲响应是有限长的，因此可以用 FFT 进行计算，这样运算速度可以大大提高；而 IIR 滤波器不能进行这样的运算。

（5）从设计上看，IIR 滤波器可以利用模拟滤波器设计的现成的闭合公式、数据和表格，可以用完整的设计公式来设计各种选频滤波器。一旦选定了已知的一种逼近方法（如巴特沃斯、切比雪夫等），就可以直接把技术指标代入一组设计方程，计算出滤波器的阶次和系统函数的系数（或极点和零点）。FIR 滤波器则一般没有现成的设计公式。窗函数法只给出了窗函数的计算公式，但计算通带和阻带衰减仍无显式表达式。一般 FIR 滤波器设计仅有计算机程序可以利用，因而要借助于计算机。

（6）IIR 滤波器主要是设计规格化、频率特性为分段常数的标准低通、高通、带通和带阻滤波器。FIR 滤波器则灵活得多，如频率抽样法可适应各种幅度特性和相位特性的要求，因此 FIR 滤波器可设计出理想正交变换器、理想微分器、线性调频器等各种网络，适应性很广。而且，目前已经有很多 FIR 滤波器的计算机程序可供使用。IIR 和 FIR 滤波器的特点对比如表 6-2 所示。

表 6-2 IIR 和 FIR 滤波器的特点对比

	FIR 滤波器	IIR 滤波器
设计方法	一般无解析的设计公式，要借助计算机程序完成	利用 AF 的成果，可简单、有效地完成设计
设计结果	可得到任意幅频特性和线性相位	只能得到幅频特性，相频特性未知，如需要线性相位，须用全通网络校准，但增加滤波器阶数和复杂性
稳定性	极点全部在原点（永远稳定）	有可能不稳定
阶数	高	低
结构	非递归系统	递归系统
运算误差	一般无反馈，运算误差小	有反馈运算中的四舍五入会产生极限环

6.5 本章小结

本章主要讲述线性相位 FIR 滤波器的基本概念、设计原理和设计方法，重点是线性相位 FIR 滤波器的特点和 FIR 数字滤波器的窗函数设计法，现将知识点归纳如下。

1. 具有线性相位的 FIR 滤波器的特点

(1) 时域特点

第一类线性相位系统: $h(n)=h(N-n-1)$ (关于中心偶对称)。

第二类线性相位系统: $h(n) = -h(N-n-1)$ (关于中心奇对称)。

(2) 频域特点

$h(n)$ 偶对称, N 为奇数: 可实现低通、高通、带通、带阻滤波特性。

$h(n)$ 偶对称, N 为偶数: 可实现低通和带通滤波特性。

$h(n)$ 奇对称, N 为奇数: 只能实现带通滤波特性。

$h(n)$ 奇对称, N 为偶数: 可实现高通和带通滤波特性。

2. 用窗函数法设计 FIR 数字滤波器的步骤

(1) 确定 FIR 滤波器的技术指标。

(2) 根据技术指标确定理想滤波器的频率响应函数。

(3) 求出理想滤波器的单位冲激响应。

(4) 根据技术指标要求选择适当的窗函数并确定窗函数的长度 N 。

(5) 对理想滤波器加窗得到实际滤波器的单位冲激响应。

(6) 求实际滤波器的频率响应并检验设计结果是否符合技术指标要求, 若不满足, 须重新设计。

习题 6

基础习题

6-1 判断题。

- (1) IIR 和 FIR 滤波器的设计思想是一样的。 ()
- (2) FIR 滤波器的最大优点是稳定和线性相位特性。 ()
- (3) 不同窗函数的性能是不一样的。 ()
- (4) FIR 滤波器的单位序列响应长度是有限的。 ()
- (5) 不同的窗函数具有相同的旁瓣峰值。 ()
- (6) 不同的窗函数具有不同的带阻最小衰减。 ()

6-2 选择题。

- (1) 已知某线性相位 FIR 滤波器的零点 z_i 位于单位圆内, 则位于单位圆内的零点还有 ()。

A. z_j^*

$$\text{B. } \frac{1}{z_i^*}$$

C. $\frac{1}{z_i}$

D. 0

- (2) 以下对有限长单位脉冲响应 (FIR) 滤波器特点的论述中, 错误的是 ()。

A. FIR 滤波器容易设计成线性相位特性

B. FIR 滤波器的单位脉冲响应 $h(n)$ 在有限个 n 值处不为零

C. 系统函数 $H(z)$ 的极点都在 $z=0$ 处

D. 实现结构只能是非递归结构

- (3) 在通信领域中, 在对相位要求高的场合, 如图像通信、数据通信等, 最好选用 () 滤波器。

A. FIR

B. IIR

C. 递归型

D. 全通型

- (4) 一个线性相位 FIR 滤波器的单位脉冲响应为奇对称、长度为奇数点, 则该滤波器适宜做 ()。

A. 低通

B. 高通

C. 带通

D. 帶阻

(5) 在通信领域中, 在对相位要求不敏感场合, 如语音通信等, 选用()滤波器较为合适。
A. FIR B. IIR C. 递归型 D. 非递归型

(6) 在数字信号处理中, FIR 系统的最主要特点是()。
A. 实现结构简单 B. 容易实现线性相位
C. 运算量小 D. 容易实现复杂的频率特性

(7) FIR 滤波器主要采用()型结构, 其系统函数 $H(z)$ 不存在()。
A. 非递归; 因果性问题 B. 递归; 因果性问题
C. 非递归; 稳定性问题 D. 递归; 稳定性问题

(8) 一个线性相位 FIR 滤波器的单位脉冲响应为偶对称、长度为偶数点, 则该滤波器适宜做()。
A. 低通 B. 高通 C. 带通 D. 带阻

(9) 一个线性相位 FIR 滤波器的单位脉冲响应为奇对称、长度为偶数点, 则该滤波器适宜做()。
A. 低通 B. 高通 C. 带通 D. 带阻

(10) 线性相位 FIR 滤波器主要有以下 4 类:

(I) $h(n)$ 偶对称, 长度 N 为奇数; (II) $h(n)$ 偶对称, 长度 N 为偶数;
(III) $h(n)$ 奇对称, 长度 N 为奇数; (IV) $h(n)$ 奇对称, 长度 N 为偶数。

则其中不能用于设计高通滤波器的是()。

A. I、II B. II、III C. III、IV D. IV、I

(11) 已知某 FIR 滤波器单位脉冲响应 $h(n)$ 的长度为 N , 则在下列不同特性的单位脉冲响应中, 可以用来设计线性相位滤波器的是()。

A. $h(n) = -h(N-n-1)$ B. $h(n) = h(N+n+1)$
C. $h(n) = -h(N-n+1)$ D. $h(n) = -h(N-n+1)$

(12) FIR 系统的系统函数 $H(z)$ 的特点是()。

A. 只有极点, 没有零点 B. 只有零点, 没有极点
C. 没有零、极点 D. 既有零点, 又有极点

(13) 已知 FIR 滤波器的系统函数 $H(z) = 1 + 2z^{-1} + 4z^{-2} + 2z^{-3} + z^{-4}$, 则该滤波器的单位脉冲响应 $h(n)$ 的特点是()。

A. 偶对称, N 为奇数 B. 奇对称, N 为奇数
C. 奇对称, N 为偶数 D. 偶对称, N 为偶数

(14) 已知 FIR 滤波器的单位脉冲响应 $H(z) = 1 + 2z^{-1} + 4z^{-2} + 3z^{-3} + 2z^{-4}$, 则该滤波器 $h(n)$ 的特点是()。

A. 偶对称, N 为奇数 B. 奇对称, N 为奇数
C. 奇对称, N 为偶数 D. 非对称

(15) 已知某 FIR 滤波器单位脉冲响应 $h(n)$ 的长度为 $M+1$, 则在下列不同特性的单位脉冲响应中, 可以用来设计线性相位滤波器的是()。

A. $h(n) = -h(M-n)$ B. $h(n) = h(M+n)$
C. $h(n) = -h(M-n+1)$ D. $h(n) = h(M-n+1)$

(16) 若 $1+j$ 是具有线性相位 FIR 滤波器的一个零点, 则下列选项中()不为其零点。

A. $1-j$ B. $\frac{1}{2}(1-j)$ C. $\frac{1}{2}(1+j)$ D. $1-\frac{1}{2}j$

(17) 以下对 FIR 和 IIR 滤波器特性的论述中, 不正确的是()。

A. FIR 滤波器主要采用递归结构

- B. IIR 滤波器不易做到线性相位
C. FIR 滤波器总是稳定的
D. IIR 滤波器主要用来设计规格化的频率特性为分段常数的标准滤波器
- (18) 以下对 FIR 和 IIR 滤波器特性的论述中，不正确的是（ ）。
- A. FIR 滤波器主要采用递归结构
B. FIR 滤波器容易做到线性相位
C. IIR 滤波器总是稳定的
D. IIR 滤波器主要用来设计规格化的频率特性为分段常数的标准滤波器
- (19) 将 FIR 滤波与 IIR 滤波器比较，下列说法中不正确的是（ ）。
- A. 相位可以做到严格线性
B. 主要是非递归结构
C. 相同性能下阶次高
D. 频率抽样型结构零极点抵消，即使有字长效应，也是稳定的
- (20) 以下有限长单位脉冲响应所代表的滤波器中，具有严格线性相位的是（ ）。
- A. $h(n)=\delta(n)+2\delta(n-1)+\delta(n-2)$
B. $h(n)=\delta(n)+2\delta(n-1)+2\delta(n-2)$
C. $h(n)=\delta(n)+2\delta(n-1)-\delta(n-2)$
D. $h(n)=\delta(n)+2\delta(n-1)+3\delta(n-2)$
- (21) 下列关于 FIR 滤波器的说法中，正确的是（ ）。
- A. FIR 滤波器容易设计成线性相位特性
B. FIR 滤波器的脉冲响应长度是无限的
C. FIR 滤波器的脉冲响应长度是确定的
D. 对于相同的幅频特性要求，用 FIR 滤波器实现要比用 IIR 滤波器实现阶数低
- (22) 因果 FIR 滤波器的系统函数 $H(z)$ 的全部极点都在（ ）处。
- A. $z=0$
B. $z=1$
C. $z=j$
D. $z=\infty$
- (23) 有限长序列 $h(n)$ ($0 \leq n \leq N-1$) 关于 $\frac{N-1}{2}$ 偶对称的条件是（ ）。
- A. $h(n)=h(N-n)$
B. $h(n)=h(N-n-1)$
C. $h(n)=h(-n)$
D. $h(n)=h(N+n-1)$
- (24) 下列关于窗函数设计法的说法中，错误的是（ ）。
- A. 窗函数的截取长度增加，则主瓣宽度减小，旁瓣宽度减小
B. 窗函数的旁瓣相对幅度取决于窗函数的形状，与窗函数的截取长度无关
C. 为减小旁瓣相对幅度而改变窗函数的形状，通常主瓣的宽度会增加
D. 窗函数法不能用于设计 FIR 高通滤波器
- (25) 在窗函数法的 FIR 滤波器设计法中，滤波器过渡带宽度近似等于（ ）倍的窗函数频谱的主瓣宽度。
- A. 1/8
B. 1/4
C. 1
D. 4
- (26) 下列关于窗函数设计法的说法中，错误的是（ ）。
- A. 窗函数的长度增加，则主瓣宽度减小，旁瓣宽度减小
B. 窗函数的旁瓣相对幅度取决于窗函数的形状，与窗函数的长度无关

C. 为减小旁瓣相对幅度而改变窗函数的形状, 通常主瓣的宽度会增加

D. 对于长度固定的窗, 只要选择合适的窗函数就可以使主瓣宽度足够窄, 旁瓣幅度足够小

(27) 利用矩形窗函数法设计 FIR 滤波器时, 在理想特性的不连续点附近形成的过渡带的宽度近似等于 ()。

A. 窗函数幅度函数的主瓣宽度

B. 窗函数幅度函数的主瓣宽度的一半

C. 窗函数幅度函数的第一个旁瓣宽度

D. 窗函数幅度函数的第一个旁瓣宽度的一半

综合习题

6-3 FIR 数字滤波器的 $h(n)$ 是奇对称的, 若 $h(0) = -h(6) = 6$; $h(1) = -h(5) = -2$; $h(2) = -h(4) = 3$; $h(3) = 0$, 试画出该滤波器的线性相位结构。

6-4 设计低通 FIR 滤波器, 要求技术指标为: 阻带最小衰减为 40dB; 通带截止频率为 3kHz; 阻带截止频率为 3.5kHz; 抽样频率为 12kHz。

6-5 用矩形窗函数设计一个阶数为 $N-1 = 24$ 且具有线性相位的 FIR 滤波器, 其理想低通滤波器的频率响应为

$$|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq 0.2\pi \\ 0 & 0.2\pi < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

6-6 用汉宁窗函数设计一个技术指标为

$$\begin{aligned} 0.99 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1.01 & \quad 0 \leq |\omega| \leq 0.3\pi \\ |H(e^{j\omega})| \leq 0.01 & \quad 0.35\pi \leq |\omega| \leq \pi \end{aligned}$$

的线性相位 FIR 滤波器。

6-7 已知带通滤波器的技术指标为

$$\begin{aligned} |H(e^{j\omega})| \leq 0.01 & \quad 0 \leq |\omega| \leq 0.2\pi \\ 0.95 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1.05 & \quad 0.3\pi \leq |\omega| \leq 0.7\pi \\ |H(e^{j\omega})| \leq 0.02 & \quad 0.8 \leq |\omega| \leq \pi \end{aligned}$$

用布莱克曼窗函数设计一个满足上述指标的线性相位 FIR 滤波器。

第7章 数字信号处理中的有限字长效应



学习重点

- ★ 掌握二进制数的表示及 A/D 转换的量化效应。
- ★ 掌握数字滤波器的系数量化效应，系数量化对滤波器零、极点位置的影响。
- ★ 掌握 FFT 算法的有限字长效应。

7.1 引言

在前面各章中讨论数字滤波器时，我们是把滤波器各系数和变量以无限精度来考虑的。当以专用数字硬件设备或计算机算法的形式实现时，运算过程中的数据和结果等都是存储在存储单元中的，而这些存储单元的长度都是有限度的。这样，数字信号与系统都不是无限精度的，而是有限精度的，精度的大小由字长决定。有限精度给原有的数字信号处理系统带来的影响称为数字信号处理中的有限字长效应。在数字系统中因有限字长的影响而引起误差的因素有：

- (1) 将模拟信号转换为数字信号（A/D 转换）过程中的量化效应；
- (2) 将系统参数（如数字滤波器系数）表示为有限位二进制数时产生的系数量化效应；
- (3) 在运算过程中由于字长限制而进行尾数处理引起的计算误差。

这种有限字长效应与数字的表示方法、所采用的运算方式、尾数的处理方式及系统结构形式等诸多因素有关。对三种误差进行综合分析是困难的，例如，算术运算方式、量化方法和滤波器结构的可能组合形式的数目极大（即对于 5 种算术运算方式、3 种量化方法、9 种滤波器结构而言，就能有多达 135 种组合）。在本章分别对 3 种效应进行单独分析。

通过分析有限字长效应，能够使我们在使用固定字长的通用计算机时，了解结果的可信度；在使用专用硬件实现时，能够分析精度以选取最小字长。

7.2 二进制数的表示及 A/D 转换的量化效应

7.2.1 二进制数的表示

数字信号处理系统将信号用二进制数表示，通过计算机实现。系统所采用的二进制算法主要有定点制、浮点制及分组浮点制。本章讨论定点制表示方法下的有限字长效应。

在整个运算中，二进制小数点在数码中的位置是固定不变的，称为定点制。在定点制中，小数点右边为小数部分，左边为整数部分。特殊地，当小数点在最右边时，这个二进制数是整数；当小数点在最左边时，这个二进制数是纯小数。

二进制小数可以采用按位加权的方法转换为十进制小数。例如，6 位字长的二进制数 101.011，其十进制值为

$$1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} = 5.375$$

理论上，定点制中小数点位置可以固定在任意位。但在实际运算中，通常把定点制的小数点固定在第 1 位和第 2 位之间。第 1 位作为符号位，为 0 表示正数，为 1 表示负数；小数点右边为数的绝对

值。这样,数 M 的取值被限制在 ± 1 之间,即 $-1 < M < 1$ 。定点制的编码方法有原码、反码和补码三种。假设定点数表示为 $a_0.a_1a_2a_3\cdots a_b$, 当符号位为 0 时,表示正数,其原码、反码和补码所代表的数具有相同的数值;当符号位为 1 时,表示负数,其原码、反码和补码所代表的数具有不同的数值。

1. 原码

原码也称为“符号-幅度码”。原码的最高位为符号位, $a_0=0$ 表示正数, $a_0=1$ 表示负数,尾数值 $a_1a_2a_3\cdots a_b$ 表示绝对值(幅度)大小,原码定义为

$$[x]_{\text{原}} = \begin{cases} |x| & 0 \leq x < 1 \\ 1+|x| \text{ (或 } 1-x) & -1 < x \leq 0 \end{cases} \quad (7-1)$$

所代表的十进制数值为

$$x = (-1)^{a_0} \sum_{i=1}^b a_i 2^{-i} \quad (7-2)$$

例如, $[x]_{\text{原}}=0.101$ 所代表的十进制数值为 $x=1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} = 0.625$; $[x]_{\text{原}}=1.101$ 所代表的十进制数值为 $x=-1 \times (1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3}) = -0.625$ 。

2. 反码

反码也称“1 的补码”。正数的反码与其原码相同。负数的反码是将该数的正数的原码连同符号位按位取反,即 0 变为 1, 1 变为 0。例如, $x=-0.625$, 其正数 0.625 的原码为 0.101, 连同符号位按位取反得 1.010, 即为 $x=-0.625$ 的反码。反码的定义为

$$[x]_{\text{反}} = \begin{cases} |x| & 0 \leq x < 1 \\ (2-2^{-b})-|x| & -1 < x \leq 0 \end{cases} \quad (7-3)$$

若

$$[x]_{\text{反}} = a_0.a_1a_2\cdots a_b$$

则其所代表的十进制数为

$$x = -a_0(1-2^{-b}) + \sum_{i=1}^b a_i 2^{-i} \quad (7-4)$$

例如, $[x]_{\text{反}}=1.010$ 所代表的十进制数为

$$x = -1 \times (1-2^{-3}) + (0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 0 \times 2^{-3}) = -0.625$$

通过实例也可以验证反码的定义式。例如, $x=-0.625$, 其原码为 1.101, 其反码为 $(2-2^{-b})-|x|=1.111-0.101=1.010$ 。

3. 补码

补码也称“2 的补码”。正数的补码与其原码相同。负数的补码是将该数的正数的原码连同符号位按位取反再加 1, 即负数的补码是其反码加 1。例如, $x=-0.625$, 其正数 0.625 的原码为 0.101, 连同符号位按位取反得 1.010, 加 1 得 1.011, 即为 $x=-0.625$ 的补码。补码的定义为

$$[x]_{\text{补}} = \begin{cases} |x| & 0 \leq x < 1 \\ 2-|x| \text{ (或 } 1-x) & -1 < x \leq 0 \end{cases} \quad (7-5)$$

若

$$[x]_{\text{补}} = a_0.a_1a_2\cdots a_b$$

则其所代表的十进制数为

$$x = -a_0 + \sum_{i=1}^b a_i 2^{-i} \quad (7-6)$$

例如, $[x]_{\text{补}}=1.011$ 所代表的十进制数为 $x=-1+0 \times 2^{-1}+1 \times 2^{-2}+1 \times 2^{-3}=-0.625$ 。

通过实例也可以验证补码的定义式。例如, $x = -0.625$, 其原码为 1.101, 其补码为 $10.000 - 0.101 = 1.011$ 。

乘法运算时采用原码运算较为方便, 两数数值部分乘除作为结果的数值部分, 两数符号位逻辑加作为结果的符号位。因此, 乘法器多采用原码制。

加减法运算如果采用原码则较为烦琐, 必须先判断两数符号是否相同再决定采用的运算是加还是减, 做减法时还要判断两数的绝对值, 再用较大的数减较小的数。然而, 采用补码进行加减法运算就可以将加法和减法统一起来, 都可以用加法进行计算。例如, 做减法时, 若减数是负数, 则将其变成正数的补码与被减数的补码相加; 若减数是正数, 则将其变为负数的补码与被减数的补码相加。因此, 加法器多采用补码制。

无论采用什么码制运算, 数的绝对值在整个运算中都不能超过 1。当数的绝对值很大时, 就乘一个比例因子再进行计算, 计算所得的结果再除以相同的比例因子, 使其既能保证运算过程中数的绝对值不超过 1, 又能得到正确的运算结果。

定点制加法运算不会增加字长, 但有可能产生溢出, 例如 $0.1001 + 0.1011 = 1.0100$, 两个正数相加结果为“负数”, 产生了溢出。定点制的乘法运算不会产生溢出, 这是因为绝对值小于 1 的两个数相乘后其绝对值仍然小于 1。不过相乘后字长会增加一倍, 一般情况下 $b+1$ 位的定点数相乘后字长为 $2b$ 位。因此在定点数每次乘法运算后需要进行尾数处理, 使计算结果保持 b 位字长。有两种尾数处理方法: 一种方法是简单地截掉超过字长 b 的所有尾数位, 称为截尾; 另一种方法相当于十进制中的四舍五入近似法, 称为舍入, 在舍去超过字长的位数时, 若舍掉部分的值大于或等于保留部分最低位的权值的一半, 则给留下部分的最低位加 1。上述两种尾数处理方法分别会带来截尾误差和舍入误差。

综上所述, 定点制的优点是快速简单, 只有乘法运算才会出现舍入误差或截尾误差, 其缺点是动态范围小, 容易产生溢出。为防止溢出, 需要压缩信号电平, 但这又会减小输出信号与量化噪声的比值(信噪比)。为避免定点制的这种缺点, 可以采用浮点制。浮点制动态范围大, 不会产生溢出, 其缺点是运算速度慢, 并且其加法和乘法运算都会产生舍入或截尾误差。分组浮点制可以结合定点制和浮点制, 兼有两者的某些优点。浮点制和分组浮点制的详细情况请参阅相关参考书。

7.2.2 定点制的量化误差

定点制乘法和浮点制加法、乘法运算都会使字长增加, 在进行数字信号处理时, 有必要对尾数进行处理。尾数处理有截尾处理和舍入处理两种方法。由尾数处理引入的误差取决于所用二进制数的位数 b 、运算方式、负数表示方法及对尾数的处理方法。

截尾处理的方法是把尾数全部截断不要; 舍入处理是保留需要的位数, 将尾数舍去并使其尽量接近原来的数值。下面讨论这两种尾数处理方法的定点制运算的量化误差, 并假设运算前定点数字长为 b , 运算后增加为 b_1 , 需要对尾数进行量化处理使字长从 b_1 减小为 b 。

1. 定点制截尾误差

由于正数的原码、反码、补码表示方法相同, 所以正数的定点制截尾误差相同; 对于负数, 其原码、反码、补码表示方法不同, 定点制截尾误差也不同, 需要分别讨论其定点制截尾误差。

(1) 正数的截尾量化误差

设 x 是 b_1 位的正数, $x = \sum_{i=1}^{b_1} a_i 2^{-i}$, 截尾后为 b 位字长, 对 x 截尾后的量化值 $Q_T[x]$ 表示为

$$Q_T[x] = \sum_{i=1}^b a_i 2^{-i} \quad (7-7)$$

截尾量化误差为

$$E_T = Q_T[x] - x = -\sum_{i=b+1}^{b_1} a_i 2^{-i} \quad (7-8)$$

由于 x 为正数, 截尾后 $Q_T[x] < x$, 故 $E_T \leq 0$, 当被截尾位 a_i ($b+1 \leq i \leq b_1$) 均为 1 时, 截尾误差达到最大, 此时可以推导出如下结果

$$\begin{aligned} \sum_{i=b+1}^{b_1} a_i 2^{-i} &= (2^{-(b+1)} + \cdots + 2^{-b_1}) = 2^{-(b+1)} (1 + 2^{-1} + 2^{-2} + \cdots + 2^{-b_1+b+1}) \\ &= 2^{-(b+1)} \sum_{i=0}^{-b_1+b+1} 2^{-i} = 2^{-(b+1)} \left(\frac{1 - 2^{-b_1+b+1-1}}{1 - 2^{-1}} \right) = 2^{-b} - 2^{-b_1} \end{aligned}$$

即

$$E_{T\max} = -\sum_{i=b+1}^{b_1} a_i 2^{-i} = -(2^{-b} - 2^{-b_1}) \quad (7-9)$$

所以

$$-(2^{-b} - 2^{-b_1}) \leq E_T \leq 0 \quad x > 0 \quad (7-10)$$

令 $\Delta = 2^{-b}$, Δ 表示截尾后最小码位的值, 称为量化宽度或量化步阶。通常 $b_1 \gg b$, 因此, 定点正数的截尾误差为

$$-\Delta \leq E_T \leq 0 \quad x > 0 \quad (7-11)$$

要点一: 定点制正数截尾量化误差为 $E_T = Q_T[x] - x = -\sum_{i=b+1}^{b_1} a_i 2^{-i}$ 。

(2) 负数的截尾量化误差

负数的原码、反码和补码的表示形式不同, 截尾量化所产生的误差也不同。

① 原码负数的十进制量化误差

$$x = -\sum_{i=1}^{b_1} a_i 2^{-i} \quad (7-12)$$

$$E_T = Q_T[x] - x = -\sum_{i=1}^b a_i 2^{-i} - \left(-\sum_{i=1}^{b_1} a_i 2^{-i} \right) = \sum_{i=b+1}^{b_1} a_i 2^{-i} \quad (7-13)$$

故截尾误差满足

$$0 \leq E_T \leq (2^{-b} - 2^{-b_1}) \quad x < 0 \quad (7-14)$$

即

$$0 \leq E_T \leq \Delta \quad x < 0 \quad (7-15)$$

例如, 原码负数 $x = 1.1011$, 表示 -0.6875 。若有限字长 $b = 2$, 截尾处理后 $Q_T(x) = 1.10$, 表示 -0.5 , $\Delta = 2^{-2} = 0.25$ 。截尾量化产生的误差为

$$E_T = -0.5 - (-0.6875) = 0.1875$$

$$0 < E_T < \Delta$$

② 反码负数的十进制量化误差

$$x = -1 + 2^{-b_1} + \sum_{i=1}^b a_i 2^{-i} \quad (7-16)$$

$$\begin{aligned} E_T &= Q_T[x] - x = (-1 + 2^{-b} + \sum_{i=1}^b a_i 2^{-i}) - (-1 + 2^{-b_1} + \sum_{i=1}^{b_1} a_i 2^{-i}) \\ &= \sum_{i=b+1}^{b_1} a_i 2^{-i} + 2^{-b} - 2^{-b_1} \end{aligned} \quad (7-17)$$

故截尾误差满足

$$0 \leq E_T < (2^{-b} - 2^{-b_1}) \quad x < 0 \quad (7-18)$$

即

$$0 \leq E_T < \Delta \quad x < 0 \quad (7-19)$$

例如, 反码负数 $x = 1.1100$, 表示 -0.1875 。若有限字长 $b = 2$, 截尾处理后 $Q_T(x) = 1.11$, 表示 0 , 截尾量化产生的误差为

$$E_T = 0 - (-0.1875) = 0.1875 > 0$$

③ 补码负数的十进制量化误差

$$x = -1 + \sum_{i=1}^{b_1} a_i 2^{-i} \quad (7-20)$$

$$E_T = Q_T[x] - x = \left(-1 + \sum_{i=1}^b a_i 2^{-i}\right) - \left(-1 + \sum_{i=1}^{b_1} a_i 2^{-i}\right) = -\sum_{i=b+1}^{b_1} a_i 2^{-i} \quad (7-21)$$

故截尾误差满足

$$-(2^{-b} - 2^{-b_1}) \leq E_T \leq 0 \quad x < 0 \quad (7-22)$$

即

$$-\Delta \leq E_T \leq 0 \quad x < 0 \quad (7-23)$$

例如, 补码负数 $x = 1.1011$, 表示 -0.3125 。若有限字长 $b = 2$, 截尾处理后 $Q_T(x) = 1.10$, 表示 -0.5 , $\Delta = 2^{-2} = 0.25$ 。截尾量化产生的误差为

$$-0.25 < E_T = Q_T(x) - x = -0.5 - (-0.3125) = -0.1875 < 0$$

要点二: 定点制负数截尾误差对于负数的原码、反码和补码有三种情况。

(1) 原码负数截尾误差为

$$E_T = Q_T[x] - x = -\sum_{i=1}^b a_i 2^{-i} - \left(-\sum_{i=1}^{b_1} a_i 2^{-i}\right) = \sum_{i=b+1}^{b_1} a_i 2^{-i}$$

(2) 反码负数截尾误差为

$$E_T = Q_T[x] - x = \left(-1 + 2^{-b} + \sum_{i=1}^b a_i 2^{-i}\right) - \left(-1 + 2^{-b_1} + \sum_{i=1}^{b_1} a_i 2^{-i}\right) = -\sum_{i=b+1}^{b_1} a_i 2^{-i} + 2^{-b} - 2^{-b_1}$$

(3) 补码负数截尾误差为

$$E_T = Q_T[x] - x = \left(-1 + \sum_{i=1}^b a_i 2^{-i}\right) - \left(-1 + \sum_{i=1}^{b_1} a_i 2^{-i}\right) = -\sum_{i=b+1}^{b_1} a_i 2^{-i}$$

2. 定点制舍入量化误差

舍入是按最接近的值取 b 位码, 因而舍入后各数值按 $\Delta = 2^{-b}$ 的间距被量化, 即两个数间最小非零差是 2^{-b} , 舍入是选择靠得最近的量化层标准值为舍入后的值, 因此不论是正数、负数, 也不论是原码、反码、补码, 其误差总是在 $\pm \frac{\Delta}{2}$ 即 $\pm \frac{2^{-b}}{2}$ 之间。用 $Q_R[x]$ 表示对 x 的舍入处理, E_R 表示舍入误差, 则

$$E_R = Q_R[x] - x \quad (7-24)$$

$$-\frac{1}{2} \times 2^{-b} < E_R \leq \frac{1}{2} \times 2^{-b} \quad (7-25)$$

即定点制舍入误差为

$$-\frac{\Delta}{2} < E_R \leq \frac{\Delta}{2} \quad (7-26)$$

有时被舍入的数恰好在两个量化层标准值的正中间, 这时可规定恒取上入, 或恒取下舍, 或是采用随机舍入。例如, 取 $b = 2$, 则

$x=0.1001$, $Q_R[x]=0.10$, 舍去 0.0001, 误差 $E_R=-2^{-4}$;

$x=0.1011$, $Q_R[x]=0.11$, 将 0.0011 上入为 0.01, 误差 $E_R=+2^{-4}$;

$x=0.1010$, 则 x 与 0.10 及 0.11 的距离相等, 因此 $Q_R[x]$ 即可下舍为 0.10, 也可上入为 0.11, 一般可仿照十进制四舍五入的规则, 取 $Q_R[x]=0.11$, 则 $E_R=+2^{-3}$ 。

要点三: 定点制舍入误差为 $E_R=Q_R[x]-x$ 。

综上所述, 补码的截尾误差恒为负数, 呈单极性分布, 其量化特性如图 7-1 (a) 所示。原码和反码的截尾误差与数的正负有关, 为正数时误差为负, 为负数时误差为正, 其量化特性如图 7-1 (b) 所示。舍入误差呈对称分布, 其量化特性如图 7-1 (c) 所示。通过比较可知截尾误差与舍入误差的统计特性不同。一般来说, 舍入误差的影响小一些, 因而应用较为普遍。

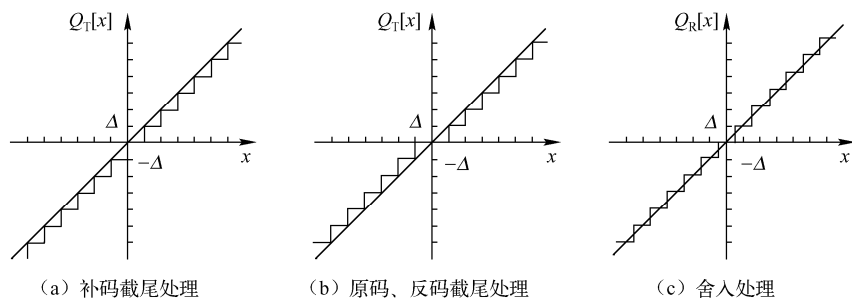


图 7-1 定点制截尾和舍入处理的量化特性

要点四: 补码的截尾误差恒为负数, 呈单极性分布; 原码和反码的截尾误差与数的正负有关, 为正数时误差为负, 为负数时误差为正; 舍入误差呈对称分布。

7.2.3 A/D 转换的量化效应

模拟信号数字化是数字信号处理系统面临的基本问题, 抽样和量化是模拟信号数字化的基本步骤。在数字信号处理系统中, 实现模拟信号数字化是由模拟/数字转换器 (简称 A/D 转换器) 完成的。

A/D 转换器在功能上由抽样器和量化器两部分组成, 抽样器将模拟信号离散化为无限精度的抽样序列, 量化器对抽样序列进行量化处理, 如图 7-2 所示。

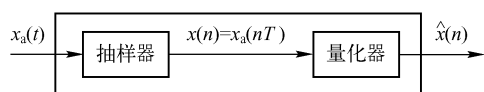


图 7-2 A/D 转换器模型图

A/D 转换器的基本作用是将输入模拟信号 $x_a(t)$ 转换为 b 位二进制数字信号。字长 b 可以选择 8, 12, ..., 20 或更高。

抽样器产生序列 $x(n) = x_a(t)|_{t=nT} = x_a(nT)$, $x(n)$ 具有无限精度。量化器对每个序列值 $x(n)$ 进行截尾或舍入的量化操作, 输出 $\hat{x}(n) = Q[x(n)]$ 。抽样和量化的功能在实际系统中是同时完成的。分析 A/D 转换器量化效应的目的是选择量化器的字长, 以满足信噪比指标。

由于 A/D 转换器总是采用定点制的, 而定点制动态范围较小, 因此信号不能超过 A/D 转换器的动态范围。为此模拟输入信号必须乘以一个比例因子 A , 以满足 A/D 转换器动态范围要求, 即

$$x(n) = Ax_a(t)|_{t=nT} = Ax_a(nT) \quad (7-27)$$

令量化器输出抽样值用 $b+1$ 位的补码定点小数表示, 绝对值用 b 位表示。输入到量化器的精确抽样值 $x(n)$ 被舍入到最靠近的量化层标准值, 得到量化抽样值 $\hat{x}(n)$ 。因而量化器对补码定点制输入信号的动态范围为

$$-\left(1 + \frac{2^{-b}}{2}\right) < x(n) < \left(1 - \frac{2^{-b}}{2}\right) \quad (7-28)$$

即

$$-\left(1+\frac{\Delta}{2}\right) < x(n) < \left(1-\frac{\Delta}{2}\right) \quad \Delta = 2^{-b} \quad (7-29)$$

量化误差为

$$e(n) = Q[x(n)] - x(n) = \hat{x}(n) - x(n) \quad (7-30)$$

A/D 转换器的量化特性主要取决于所采用的数制表示方法和量化方式, 对于补码舍入处理, 根据式 (7-26) 可知

$$-\frac{\Delta}{2} < e_R(n) \leq \frac{\Delta}{2} \quad (7-31)$$

补码舍入处理 A/D 转换器的量化特性曲线如图 7-3 所示。

对于补码截尾处理, 由式 (7-21) 和式 (7-23) 可知, A/D 转换器的量化误差为

$$-\Delta < e_T(n) \leq 0 \quad (7-32)$$

补码截尾处理 A/D 转换器的量化特性曲线如图 7-4 所示 ($b=2$)。

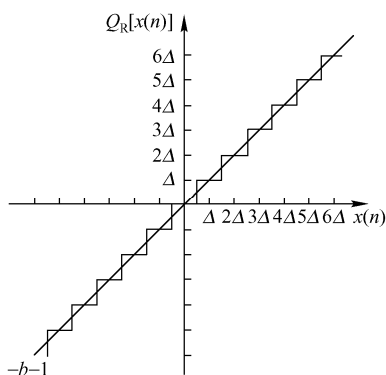


图 7-3 补码舍入处理 A/D 转换器的量化特性曲线

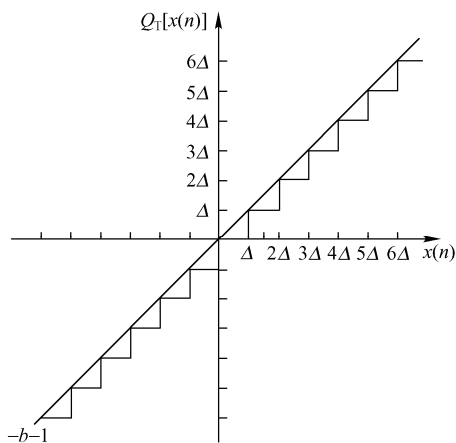


图 7-4 补码截尾处理 A/D 转换器的量化特性曲线

需要注意的是, 如果输入信号取值超出式 (7-29) 规定的动态范围, 将会产生过载问题。解决过载问题可以采用限幅方法, 当抽样值超过 $\left(1-\frac{2^{-b}}{2}\right)$ 时, 量化值皆取为 $(1-2^{-b})$; 当抽样值小于 $\left(-1-\frac{2^{-b}}{2}\right)$ 时, 量化值皆取为 (-1) 。通常, 不希望出现限幅作用, 因而将输入信号加权以满足 A/D 转换器的动态范围要求。

要点五:

A/D 转换器的基本作用是将输入模拟信号 $x_a(t)$ 转换为 b 位二进制数字信号。A/D 转换器实现抽样和量化功能。A/D 转换器采用定点制, 信号不能超过 A/D 转换器的动态范围。

量化器对补码定点制输入信号的动态范围为 $-\left(1+\frac{2^{-b}}{2}\right) < x(n) < \left(1-\frac{2^{-b}}{2}\right)$ 。

量化误差为 $e(n) = Q[x(n)] - x(n) = \hat{x}(n) - x(n)$ 。

当 A/D 转换器的输入超过 $\left(1-\frac{2^{-b}}{2}\right)$ 时, 量化值皆取为 $(1-2^{-b})$; 当抽样值小于 $\left(-1-\frac{2^{-b}}{2}\right)$ 时, 量化值皆取为 -1 。

在实际应用中,通常将输入信号加权以满足 A/D 转换器的动态范围要求。

7.3 数字滤波器的系数量化效应

理想数字滤波器的系统函数为

$$H(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} / \left(1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} \right) \quad (M \leq N)$$

式中,系数 a_k 、 b_k 由理论设计得出的结果都是无限精度的,在实际系统中,这些系数是以二进制数的形式存储在有限长的存储器中的,因而必须加以量化。

理想数字滤波器系统函数中的系数量化后,会与原来的系数值有偏差,从而造成滤波器的零点、极点位置发生偏移,这样实际系统函数将与原设计有所不同,也就是系统的实际频率响应与按要求设计的频率响应有偏离,甚至严重时,如果 z 平面单位圆内极点偏移到单位圆外,会造成系统不稳定,滤波器不能使用。

系数量化对滤波器性能的影响和字长有关,同时也和滤波器的结构形式密切相关,选择合适的结构对减小系数量化的影响也是非常重要的。分析数字滤波器系数量化误差的目的在于选择合适的字长,以满足频率响应指标的要求。

7.3.1 系数量化对滤波器零、极点位置的影响

滤波器系统函数的零、极点决定了系统的频率响应特性。系数量化后,改变了零点和极点位置,会使滤波器的特性与所要求的频率响应不同。也就是说,系数量化误差导致零、极点偏离其应有的位置,从而影响了滤波器的精度,甚至导致滤波器不稳定。所以一个网络结构对系数量化的灵敏度是用系数量化引起的极点、零点的位置误差来衡量的。

系数量化误差对于极点位置的影响程度称为极点位置灵敏度,即每个极点位置对各系数偏差的敏感程度。相似的定义及分析方法同样适用于零点。但由于极点位置对系统的影响更大,它可能直接影响系统的稳定性,所以更应该引起设计者注意。

设无限精度的 N 阶直接型结构 IIR 数字滤波器的系统函数为

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (7-33)$$

式中, a_k 、 b_k 是系统直接型结构的无限精度系数,若在实际系统中量化为 \hat{a}_k 、 \hat{b}_k ,用 Δa_k 、 Δb_k 表示量化过程造成的系数误差,则有

$$\begin{cases} \hat{a}_k = a_k - \Delta a_k \\ \hat{b}_k = b_k - \Delta b_k \end{cases} \quad (7-34)$$

实际实现的系统函数为

$$\hat{H}(z) = \frac{\sum_{k=0}^M \hat{b}_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N \hat{a}_k z^{-k}} \quad (7-35)$$

令 $A(z)=0$, 表示系统函数 $H(z)$ 的特征方程

$$A(z) = \prod_{i=1}^N (1 - z_i z^{-1}) = 0 \quad (7-36)$$

得到系统函数 $H(z)$ 特征方程的根 (极点)

$$z = z_i \quad i = 1, 2, \dots, N$$

同样, 可以得到系数量化后的 $H(z)$ 的极点。设 Δz_i 为极点的偏移量, $H(z)$ 的极点为

$$z = z_i + \Delta z_i \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Δz_i 是由系数 a_k 量化所引起的, 因此

$$\Delta z_i = \sum_{k=1}^N \frac{\partial z_i}{\partial a_k} \Delta a_k \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (7-37)$$

可以看出, $\partial z_i / \partial a_k$ 值的大小决定着系数量化误差 Δa_k 对极点位置偏差 Δz_i 的影响程度, $\partial z_i / \partial a_k$ 越大, Δa_k 对 Δz_i 的影响就越大, 反之, $\partial z_i / \partial a_k$ 越小, Δa_k 对 Δz_i 的影响就越小。所以称 $\partial z_i / \partial a_k$ 为系统函数 $H(z)$ 的第 i 个极点 z_i 对 $H(z)$ 分母的第 k 个系数 a_k 变化的灵敏度。经推导可得到极点位置灵敏度为

$$\frac{\partial z_i}{\partial a_k} = \frac{z_i^{N-k}}{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^N (z_i - z_l)} \quad (7-38)$$

将式 (7-38) 代入式 (7-37), 得到各 a_k 的偏差 Δa_k 引起的第 i 个极点位置的变化量

$$\Delta z_i = \sum_{k=1}^N \frac{z_i^{N-k}}{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^N (z_i - z_l)} \Delta a_k \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (7-39)$$

式中, 分母的每一个因子 $(z_i - z_l)$ 是一个极点 z_l 指向 z_i 的矢量, 整个分母是所有其他极点 z_l ($l \neq i$) 指向该极点 z_i 的矢量积。这些矢量越长 (极点越分散), 极点灵敏度就越低; 这些矢量越短 (极点越密集), 极点灵敏度就越高。极点灵敏度的高低反映了系数量化误差对极点偏移的大小。在相同程度的系数量化下所造成的极点位置误差受极点灵敏度的影响, 极点灵敏度越高, 系数量化误差对极点偏移造成的影响就越大; 极点灵敏度越低, 则系数量化误差对极点偏移造成的影响就越小。

从滤波器结构的角度分析, 高阶直接型结构极点位置偏移量对系数量化误差更为敏感。对于高阶滤波器来说, 应该避免采用直接型结构, 而应采用分解为基本二阶节或一阶节的级联型结构或并联型结构。这样, 在给定字长的情况下, 可以使系数量化的影响最小。同时, 对于极点灵敏度要求极高的场合, 可以采用双精度系数, 以便有效地达到精度的要求。

【例 7-1】 设数字滤波器的系统函数为 $H(z) = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}$, 若系数 $a_1 = -2$, $a_2 = -3$, $b_0 = 0.049$,

要求保持极点位置误差小于 0.5%, 试确定系数量化所需的最小字长。

解: 令系统函数 $H(z)$ 分母为零, 即

$$1 + a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} = 0$$

解得

$$z_1 = 1 + \sqrt{2}j, \quad z_2 = 1 - \sqrt{2}j$$

因此

$$|z_1| = |z_2| = \sqrt{3}$$

因为极点位置灵敏度为

$$\frac{\partial z_i}{\partial a_k} = \frac{z_i^{N-k}}{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^N (z_i - z_l)}$$

可求得 a_1 、 a_2 对极点 z_1 、 z_2 的影响为

$$\frac{\partial z_1}{\partial a_1} = \frac{z_1}{z_1 - z_2} = \frac{1 + \sqrt{2}j}{2\sqrt{2}j}, \quad \left| \frac{\partial z_1}{\partial a_1} \right| = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

同理可得

$$\left| \frac{\partial z_2}{\partial a_1} \right| = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \quad \left| \frac{\partial z_1}{\partial a_2} \right| = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad \left| \frac{\partial z_2}{\partial a_2} \right| = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

根据题意, 只需考虑影响的绝对值。

可见, a_1 对极点 z_1 、 z_2 的影响是相同的, a_2 对极点 z_1 、 z_2 的影响也是相同的。

题中要求保持极点位置误差小于 0.5%, 令误差等于 0.5%, 即

$$\left| \frac{\Delta z_1'}{z_1} \right| = 0.5\%, \quad \left| \frac{\Delta z_1''}{z_1} \right| = 0.5\%$$

又因为

$$\left| \Delta z_1' \right| = \left| \frac{\partial z_1}{\partial a_1} \right| \cdot |\Delta a_1|, \quad \left| \Delta z_1'' \right| = \left| \frac{\partial z_1}{\partial a_2} \right| \cdot |\Delta a_2|$$

所以

$$\begin{aligned} \left| \Delta z_1' \right| &= \left| \frac{\partial z_1}{\partial a_1} \right| \cdot |\Delta a_1| = 0.5\% \times \sqrt{3}, \quad |\Delta a_1| = \frac{0.5\% \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} / (2\sqrt{2})} = 0.014142 \\ \left| \Delta z_1'' \right| &= \left| \frac{\partial z_1}{\partial a_2} \right| \cdot |\Delta a_2| = 0.5\% \times \sqrt{3}, \quad |\Delta a_2| = \frac{0.5\% \times \sqrt{3}}{1 / (2\sqrt{2})} = 0.024495 \end{aligned}$$

所需的系数量化步距为

$$2 \times |\Delta a_1| = 0.028284$$

$$2 \times |\Delta a_2| = 0.048990$$

如果采用定点二进制小数表示, 设小数点后 b 位, 则分辨率为 2^{-b} , 则应满足

$$2^{-b} < 2 \cdot \min[|\Delta a_1|, |\Delta a_2|] = 0.028284$$

取 b 为整数, 可得 $b=6$ 。

7.3.2 IIR 数字滤波器的有限字长效应

系数量化会造成系统函数零、极点偏移, 从而影响滤波器的性能。系数量化所造成的滤波器频率特性的偏差往往不能直接求得, 尤其是在高阶情况下, 但这正是我们最关心的问题。高阶滤波器系数多, 量化误差更具有随机性, 因而可从统计角度来分析这些偏移对滤波器性能的影响。下面以直接型 IIR 滤波器为例, 讨论 IIR 滤波器的有限字长效应。

设 N 阶 IIR 直接型滤波器无限精度系数的系统函数为

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (7-40)$$

对其系数量化后的系统函数为

$$\hat{H}(z) = \frac{\sum_{k=0}^M \hat{b}_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N \hat{a}_k z^{-k}} \quad (7-41)$$

系数量化采用舍入方式将系数量化为小数点后 b 位字长, 系数 a_k 、 b_k 的量化误差分别为 α_k 、 β_k , 其变化范围皆为 $\left[-\frac{\Delta}{2}, +\frac{\Delta}{2}\right]$, 且假定在此变化范围内均匀分布, 方差为 $\sigma^2 = \frac{\Delta^2}{12}$ 。量化后的系数为

$$\begin{cases} \hat{a}_k = a_k + \alpha_k \\ \hat{b}_k = b_k + \beta_k \end{cases} \quad (7-42)$$

为了研究系数量化所造成的频率响应的偏差, 可以先研究系数量化所造成的系统函数偏差。令量化后系统函数偏差为 $H_E(z)$, 则

$$H_E(z) = \hat{H}(z) - H(z) \quad (7-43)$$

因此, 实际滤波器的系统函数 $\hat{H}(z)$ 可以表示为无限精度系数滤波器的系统函数 $H(z)$ 与偏差滤波器系统函数 $H_E(z)$ 的并联。

为了求出系数量化造成的频率响应偏差, 只需将 $z = e^{j\omega}$ 代入式 (7-43) 中, 得到

$$H_E(e^{j\omega}) = \hat{H}(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega}) \quad (7-44)$$

$H_E(e^{j\omega})$ 的均方偏差 ε^2 可以作为频率响应偏差的估计值。一般用均方偏差的均方值 $\sigma^2(\varepsilon)$ (对频率响应偏差的均方偏差求统计平均值) 来估计系数量化所需字长 b 。经推导 $\sigma^2(\varepsilon)$ 与 σ^2 成正比, 而 $\sigma^2 = \frac{\Delta^2}{12}$, 且 $\Delta^2 = 2^{-2b}$, 从而估计出字长 b ; 反过来, 在一定字长 b 情况下, 可以估计出频率响应偏差的统计平均值。

应该注意的是, 从统计的角度把系数量化误差及频率响应均方偏差都看成随机变量, 是为了对 ε^2 的值做一个概率的估计, 即 $\sigma^2(\varepsilon)$ 是 ε^2 最有可能出现的值, 当滤波器阶数越高、系数越多时, 这种估计的收敛性就越好。然而, 对于一个具体的滤波器来说, 系数量化误差是固定值而不是随机变量, 其频率响应的均方偏差也是固定值。

7.3.3 FIR 数字滤波器的有限字长效应

由于 FIR 数字滤波器的单位脉冲响应 $h(n)$ 对 $\frac{N-1}{2}$ 点呈现奇对称或偶对称, 长度 N 可取奇数或偶数, 所以 4 种线性相位 FIR 数字滤波器共有 4 种幅度情况, 考虑这 4 种幅度情况在数字滤波器的设计中应用得最多的为 $h(n) = h(N-1-n)$, 偶对称且 N 为奇数, 因此以这种情况为例进行讨论。

长度 N 取奇数、系数 $h(n)$ 偶对称的 FIR 线性相位数字滤波器的频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = H(\omega) e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \quad (7-45)$$

其中

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{(N-3)/2} 2h(n) \cos\left[\left(\frac{N-1}{2} - n\right)\omega\right] + h\left(\frac{N-1}{2}\right) \quad (7-46)$$

设系数采用舍入方式进行量化, 量化长度为 b 位, 系数量化误差为 $e(n)$, 其均值为 0, 方差为 $\sigma^2 = \Delta^2 / 12$, 变化范围为 $(-\Delta/2, \Delta/2]$, 则实际系数为

$$\hat{h}(n) = h(n) + e(n) \quad 0 \leq n \leq (N-1)/2 \quad (7-47)$$

且 $\hat{h}(n)$ 也一定满足偶对称, 即 $\hat{h}(n) = \hat{h}(N-1-n)$, 所以有

$$\hat{H}(z) = H(z) + E(z) \quad (7-48)$$

$$\hat{H}(\omega) = H(\omega) + E(\omega) \quad (7-49)$$

实际滤波器的频率响应偏差为

$$\begin{aligned} E(\omega) &= \hat{H}(\omega) - H(\omega) \\ &= \sum_{n=0}^{(N-3)/2} 2e(n) \cos \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right] + e \left(\frac{N-1}{2} \right) \end{aligned} \quad (7-50)$$

所以系数量化后, FIR 数字滤波器可以表示为无限精度滤波器与一个频率响应为 $E(\omega)e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}$ 的滤波器的并联。

可以推导出

$$|E(\omega)| \leq \frac{N\Delta}{2} \quad (7-51)$$

$E(\omega)$ 的均方值为

$$\sigma^2(\omega) = E[E^2(\omega)] = \frac{\Delta^2}{12} \left[1 + 4 \sum_{n=1}^{(N-1)/2} \cos^2(\omega n) \right] \quad (7-52)$$

且有

$$\sigma^2(\omega) \leq (2N-1) \cdot \frac{\Delta^2}{12} = (2N-1)\sigma^2 = (2N-1) \frac{2^{-2b}}{12} \quad (7-53)$$

该式说明, 在不知道 FIR 数字滤波器单位脉冲响应的具体系数值时, 如果给定所需频率响应偏差的均方值及单位脉冲响应的长度 N , 则设计者可以估计出系数量化所需字长 b , 即设计所需的精度。

要点六:

理想数字滤波器系统函数中的系数量化后, 会与原来的系数值有偏差, 从而造成滤波器的零、极点位置发生偏移, 系统的实际频率响应与按要求设计出的频率响应有偏离, 甚至会造成系统不稳定。

极点灵敏度的高低反映了系数量化误差对极点偏移的大小。在相同程度的系数量化下所造成的极点位置误差受极点灵敏度的影响, 极点灵敏度越高, 系数量化误差对极点偏移造成的影响就越大; 极点灵敏度越低, 则系数量化误差对极点偏移造成的影响就越小。

从滤波器结构的角度分析, 高阶直接型结构极点位置偏移量对系数量化误差更为敏感。对于高阶滤波器来说, 应该避免采用直接型结构, 而应采用分解为基本二阶节或一阶节的级联型结构或并联型结构。

7.4 FFT 算法的有限字长效应

FFT 算法是 DFT 的快速算法, 在数字滤波器和频谱分析中应用得非常广泛, 因此分析 FFT 算法中有限字长效应对寄存器长度的选择非常重要。与分析数字滤波器的有限字长效应一样, 全面分析这种影响同样是非常困难的, 不过为了选择寄存器长度, 可以借助可加性噪声进行简化分析。下面以时间抽取(DIT)的基-2 FFT 为例, 针对舍入情况, 以加性噪声来分析运算中的有限字长效应和系数量化效应。

7.4.1 定点 FFT 计算中的有限字长效应

设序列 $x(n)$ 的长度为 $N=2^L$, 原位运算的基-2 DIT-FFT 算法共有 $L=\log_2 N$ 级, 每级有 N 个数, 构成运算序列, 含 $N/2$ 个蝶形运算。 m 列到 $m+1$ 列的蝶形运算可表示为

$$X_{m+1}(i) = X_m(i) + W_N^r X_m(j) \quad (7-54)$$

$$X_{m+1}(j) = X_m(i) - W_N^r X_m(j) \quad (7-55)$$

用定点数实现算法时,若暂不考虑溢出,则只有乘法才需舍入。以加性误差来考虑舍入的影响,其统计模型如图 7-5 所示。图中, $e(m,j)$ 表示 $X_m(j)$ 与 W_N^r 相乘所引入的舍入误差。 $e(m,j)$ 是复数,每个复乘包括 4 个实乘,每个定点实乘产生一个舍入误差源。如果不考虑系数 W_N^r 的量化误差,则 $X_m(j)$ 与 W_N^r 相乘舍入后的误差 $e(m,j)$ 由 4 个实数舍入误差 $e_1(m,j)$ 、 $e_2(m,j)$ 、 $e_3(m,j)$ 和 $e_4(m,j)$ 构成。

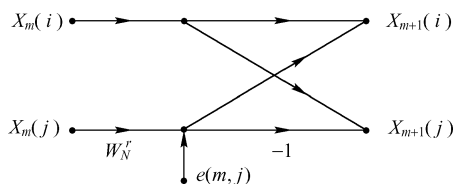


图 7-5 基-2 DIT-FFT 算法蝶形结的定点舍入统计模型

假设误差 $e_i(m,j)$ ($i=1,2,3,4$) 的统计特性为

- (1) $e_i(m,j)$ 是白噪声,在 $(-\Delta/2, \Delta/2)$ 范围内是均匀分布的,其均值为 0, 方差为 $\Delta^2/12$;
- (2) 各 $e_i(m,j)$ 互不相关,且某一复乘的 4 个误差源与其他复乘的误差源也互不相关;
- (3) 所有 $e_i(m,j)$ 与输入互不相关,因而与输出也互不相关。

一个复乘 ($X_m(j)$ 与 W_N^r) 舍入后引入误差的模的平方为

$$|e(m,j)|^2 = [e_1(m,j) + e_2(m,j)]^2 + [e_3(m,j) - e_4(m,j)]^2 \quad (7-56)$$

$$(\text{因 } X_m(j) = \text{Re}[X_m(j)] + i \text{Im}[X_m(j)], W_N^r = e^{-i\frac{2\pi r}{N}} = \left[\cos \frac{2\pi r}{N} \right] - i \left[\sin \frac{2\pi r}{N} \right])$$

由于各 $e_i(m,j)$ 互不相关,故 $e(m,j)$ 的统计平均及方差分别为

$$m_e = E[e(m,j)] = 0 \quad (7-57)$$

$$\sigma_e^2 = E[|e(m,j)|^2] = 4 \cdot \frac{\Delta^2}{12} = \frac{\Delta^2}{3} \quad (7-58)$$

误差源通过后级蝶形运算后,其方差不会发生变化,因为加减不影响方差,乘系数也不影响方差

$$E[|e(m,j)W_N^r|^2] = |W_N^r|^2 E[|e(m,j)|^2] = E[|e(m,j)|^2] \quad (7-59)$$

即 W_N^r 取模其值为 1, 所以 $e(m,j)$ 通过所有蝶形运算后,其方差均保持不变。

因为每个蝶形结产生的误差的方差均为 σ_e^2 , 所以计算 FFT 的最后输出误差,只需知道节点共连接多少个蝶形结即可。令 $F(k)$ 表示 $X(k)$ 上叠加的误差,它和末级的 1 个蝶形结连接,和末级前一级的 2 个蝶形结连接,依次类推,连接 $X(k)$ 末端的误差源总数为

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{L-1} = 2^L - 1 = N - 1 \quad (7-60)$$

即 $F(k)$ 由 $N-1$ 个 $e(m,j)$ 叠加而成,而每个 $e(m,j)$ 通过所有蝶形运算后其方差均保持不变,所以 $F(k)$ 的方差为 σ_e^2 的叠加。因而 $F(k)$ 的统计均值和方差分别为

$$m_f = E[F(k)] = 0 \quad (7-61)$$

$$\sigma_f^2 = E[|F(k)|^2] = (N-1)\sigma_e^2 \quad (7-62)$$

式中, m_f 为 $F(k)$ 的统计均值, σ_f^2 为 $F(k)$ 的方差。

当 N 很大时,可近似认为

$$\sigma_f^2 = E[|F(k)|^2] \approx N\sigma_e^2 = \frac{N\Delta^2}{3} \quad (7-63)$$

下面讨论定点制运算防止溢出的方法。由式 (7-54) 和式 (7-55) 可以得到

$$\max(|X_m(i)|, |X_m(j)|) \leq \max(|X_{m+1}(i)|, |X_{m+1}(j)|) \quad (7-64)$$

$$\max(|X_{m+1}(i)|, |X_{m+1}(j)|) \leq 2 \max(|X_m(i)|, |X_m(j)|) \quad (7-65)$$

由式(7-64)可知,在FFT运算过程中,从前一级到后一级,最大模非递减,只要后一级不发生溢出,则前一级必不会溢出。由式(7-65)可知,如果前级输出不大于1/2,则后一级输出必小于1,从而不溢出。

设整个FFT共有 $L=\log_2 N$ 级蝶形运算,则

$$\max(|X(k)|) \leq 2^L \max(|x(n)|) = N \max(|x(n)|) \quad (7-66)$$

蝶形运算表明,后级小于等于前级的2倍,蝶形运算共有 L 级,总的倍乘数为 2^L 。也就是说,要使 $X(k)$ 不溢出,需 $\max|X(k)| < 1$,即要求

$$|x(n)| < \frac{1}{N} \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (7-67)$$

由此可以得出以下两种防止溢出的方法。

(1) 在输入端乘以比例因子 $1/N$ 。如果输入信号 $|x(n)| < 1$,则 $X(k)$ 一定不会发生溢出。但是这种方法使得输入信号的幅度被限制得过小,会造成输出信噪比过小。

(2) 在每级蝶形运算的输入端乘以比例因子 $1/2$ 。因为蝶形运算的输出不大于输入的2倍,所以此时如果输入信号不发生溢出,则输出信号就不会发生溢出。这种方法在每一级蝶形运算中分散地引入衰减因子,可以提高输出的信噪比。

要点七:

FFT算法应用非常广泛,因此分析FFT算法中有限字长效应对寄存器长度的选择非常重要。

以蝶形结为基本运算单元,用统计分析的方法分析FFT运算中的有限字长效应和系数量化效应。防止溢出的方法如下。

(1) 在输入端乘以比例因子 $1/N$ 。如果输入信号 $|x(n)| < 1$,则 $X(k)$ 一定不会发生溢出。但是这种方法使得输入信号的幅度被限制得过小,会造成输出信噪比过小。

(2) 在每级蝶形运算的输入端乘以比例因子 $1/2$ 。因为蝶形运算的输出不大于输入的2倍,所以此时如果输入信号不发生溢出,则输出信号就不会发生溢出。这种方法在每一级蝶形运算中分散地引入衰减因子,可以提高输出的信噪比。

7.4.2 系数量化对FFT的影响

当系统确定后,系数值也是确定的,因而系数量化产生的误差不是随机的。运用统计的方法分析,可以在不知系统的具体数值时,在一定字长下,对系统量化造成的统计影响做统计估计。

理想FFT运算为

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \quad (7-68)$$

系数量化后可以表示为

$$\hat{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \hat{W}_N^{nk} = X(k) + F(k) \quad (7-69)$$

式中, $F(k)$ 为系数量化产生的计算误差。仍然假设系数量化采用舍入方式,量化长度为 b 位。

系数量化引起的计算误差为

$$F(k) = \hat{X}(k) - X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) [\hat{W}_N^{nk} - W_N^{nk}] \quad (7-70)$$

经过推导可以得到, $F(k)$ 的统计平均值和方差分别为

$$m_F = E[F(k)] = 0 \quad (7-71)$$

$$\sigma_F^2 = E[|F(k)|^2] \approx \sum_{k=0}^{N-1} |x(n)|^2 \frac{L}{6} \Delta^2 \quad (7-72)$$

根据 DFT 的帕塞瓦尔定理

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 \quad (7-73)$$

可以将 $X(k)$ 视为 FFT 算法的输出信号, 上式右端为输出信号的均方值, 这样就得到输出均方误差与输出均方信号的比值为

$$\frac{\sigma_F^2}{\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2} = \frac{L}{6} \cdot \Delta^2 \quad (7-74)$$

由此得出结论: FFT 算法输出信噪比随 N 的增大而增大的速度极为缓慢, 只与 $L = \log_2 N$ 成正比。 N 增大 1 倍, L 增大 1, 输出信噪比增大极小。在一定信噪比下, 系数量化所需字长 b 也可由此进行估计。

要点八: 在系统系数确定字长情况下, 用统计分析的方法可知, FFT 算法输出信噪比随 N 的增大而增加的速度极为缓慢, 只与 $L = \log_2 N$ 成正比。 N 增大 1 倍, L 增大 1, 输出信噪比增大极小。在一定信噪比下, 系数量化所需字长 b 也可由此进行估计。

7.5 本章小结

数字信号处理系统处理的信号是离散信号, 信号幅度、运算过程及结果都采用二进制数表示, 系统参数也用二进制数表示, 无论是采用硬件方式还是软件方式, 各种数据和参数都存储在有限字长的存储单元中。因此, 在数字信号处理系统的设计和实现中, 必须考虑由于有限字长的限制对系统及数据带来的误差, 而这些误差存在的影响是极其复杂的。本章简要介绍了有限字长效应在将模拟信号量化为数字信号过程中的 A/D 量化效应, 将系统参数(如数字滤波器系数)表示为有限位二进制数时产生的系数量化效应, 以及在运算过程中由于字长限制而进行尾数处理所引起的计算误差。

数字信号处理系统采用专用硬件实现时, 往往需要考虑设备成本。对有限字长效应的分析, 有助于确定在一定精度要求下需要选用的最小字长。

数字信号处理系统采用计算机软件实现时, 字长一般是由所选用的通用计算机决定的。通过进行有限字长效应分析, 能够知道系统设计的精度, 以及是否需要加以改进。

习题 7

基础习题

7-1 有限字长效应在数字系统中引起误差的因素有_____、_____和_____。

7-2 反码负数 $x=1.1010$, 表示的十进制数为_____。若有限字长 $b=2$, 截尾处理后 $Q_T(x)=$ _____, 表示的十进制数为_____, 截尾量化产生的误差为_____。

7-3 A/D 转换包括_____和_____两个步骤。A/D 转换器采用定点制, 信号不能超过 A/D 转换器的动态范围。

7-4 量化器对补码定点制输入信号的动态范围为 $-\left(1+\frac{2^{-b}}{2}\right) < x(n) < \left(1-\frac{2^{-b}}{2}\right)$, 当 A/D 转换器的输入超过 $\left(1-\frac{2^{-b}}{2}\right)$ 时, 量化值皆取为_____; 当抽样值小于 $\left(-1-\frac{2^{-b}}{2}\right)$ 时, 量化值皆取为_____。在实际应用中, 通常将输入信号_____以满足 A/D 转换器的动态范围要求。

7-5 理想数字滤波器系统函数中的系数量化后,会与原来的系数值有偏差,从而造成滤波器的零、极点位置_____,如果 z 平面单位圆内极点偏移到单位圆外,会造成系统_____。

综合习题

7-6 简述定点制二进制数的特点。

7-7 简述定点制二进制数量化截尾误差量化特性。

7-8 简述定点制二进制数量化舍入误差量化特性。

7-9 什么是极点灵敏度?分析极点灵敏度对滤波器系数量化的影响,并说明为了减少系数量化的影响,滤波器的设计应采取什么方案。

第8章 MATLAB 仿真实验



数字信号处理是一门理论与实际相结合的课程,为了更好地学习数字信号处理的相关内容,本章主要介绍 MATLAB 软件及在数字信号处理中的仿真应用,通过仿真分析,深入理解和掌握基础理论。本章共八个实验,内容如下:

- 实验一 离散系统的时域分析;
- 实验二 离散系统的时域特性;
- 实验三 时域抽样;
- 实验四 频域抽样;
- 实验五 离散系统的复频域分析;
- 实验六 DFT/FFT 频谱分析及应用;
- 实验七 IIR 数字滤波器的设计;
- 实验八 FIR 数字滤波器的设计。

建议读者在学习完前面各章后,自行安排相关仿真实验。

实验一 离散系统的时域分析

1. 实验目的

- (1) 掌握 MATLAB 的编程和调试技巧。
- (2) 掌握差分方程的求解方法。
- (3) 通过实验进一步理解卷积定理,了解卷积的过程。

2. 实验原理

时域中,离散时间系统对输入信号或延迟信号进行运算处理,生成具有所需特性的输出信号。本实验通过 MATLAB 仿真一些简单的离散时间信号和系统。

一个离散时间系统,输入信号为 $x(n)$,输出信号为 $y(n)$,运算关系用 $T[\cdot]$ 表示,则输入与输出的关系可表示为 $y(n)=T[x(n)]$ 。

我们知道描述线性移不变离散时间系统的数学模型是常系数差分方程,它与系统的结构流程图之间可以互相推导。迭代解法(也称递推解法)是求解差分方程的最简单也最适用的方法,也是实现数字滤波器的一种基本方法。

差分方程通式为

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{m=0}^M b_m x(n-m)$$

$x(n)$ 与 $y(n)$ 分别为系统的激励和响应。

MATLAB 以函数 `filter(num, den, x)`来计算在给定输入和差分方程系数时差分方程的数值解。`num`、`den`分别为系统方程的系数向量, `x`是输入序列。

线性移不变离散时间系统的响应为输入信号和系统的冲激响应的卷积,其表示如下:

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) = x(n)*h(n)$$

可物理实现的线性时不变系统是稳定的、因果的。这种系统的单位脉冲响应是因果（单边）且绝对可和的，即 $h(n)=0, n<0, \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < \infty$ 。在 MATLAB 中采用 conv 实现卷积运算，即 $y=\text{conv}(x,h)$ ，

它默认从 $n=0$ 开始。对于任意位置上的序列计算线性卷积的函数，则应该应用 conv_m，如下：

```
function[y,ny]=conv_m(x,nx,h,nh)
nyb=nx(1)+nh(1);nye=nx(length(x)+nh(length(h)));
ny=[nyb:nye];           %ny 为卷积结果 y 的起点、终点坐标
y=conv(x,h);            %y 为卷积结果
```

3. 实验内容及步骤

(1) 用 MATLAB 计算差分方程

$$\begin{aligned} y(n) + 0.7(n-1) - 0.45y(n-2) - 0.6y(n-3) \\ = 0.8x(n) - 0.44x(n-1) + 0.36x(n-2) + 0.02x(n-3) \end{aligned}$$

当输入序列为 $x(n) = \delta(n)$ 时的输出结果 $y(n)$ ， $0 \leq n \leq 40$ 。

(2) 用 MATLAB 计算因果序列 {3,11,7,0,-1,4,2} 和因果序列 {2,3,0,-5,2,1} 的离散卷积。

(3) 设非因果序列 $x(n)=\{1,4,3,5,1,2,3,2\}$ ， $-4 \leq n \leq 3$ ， $h(n)=\{3,2,4,1,3,2\}$ ， $-3 \leq n \leq 2$ ，求 $y(n)=x(n)*h(n)$ 。

4. 实验报告及要求

(1) 对各实验所得结果进行简单分析和解释。

(2) 打印程序清单和要求的各信号波形。

5. 实验参考程序

(1) 内容 1：用 MATLAB 计算差分方程

```
N=41;
a=[0.8 -0.44 0.36 0.02];
b=[1 0.7 -0.45 -0.6];
x=[1 zeros(1,N-1)];%40 个序列值,首个为 1,其余 39 个为零
k=0:1:N-1;
y=filter(a,b,x);
stem(k,y)
xlabel('n');ylabel('幅度')
```

(2) 内容 2：用 conv 实现因果序列卷积

```
a=[3 11 7 0 -1 4 2];
b=[2 3 0 -5 2 1];
c=conv(a,b);
M=length(c)-1;
n=0:1:M;
stem(n,c);
xlabel('n'); ylabel('幅度');
```

(3) 内容 3：用 conv_m 实现非因果序列卷积

```
x=[1,4,3,5,1,2,3,2];nx=[-4:3];
h=[3,2,4,1,3,2];nh=[-3:2];
[y,ny]=conv_m(x,nx,h,nh) %ny 为在横坐标轴上的位置取值
%扩展长度
n=length(ny);x1=zeros(1,n);h1=zeros(1,n);
x1(find((ny>=min(nx))&(ny<=max(nx))==1))==x;
h1(find((ny>=min(nh))&(ny<=max(nh))==1))==h;
%绘图
```

```
subplot(3,1,1);stem(ny,x1);xlabel('n');ylabel('x(n)');
subplot(3,1,2);stem(ny,h1);xlabel('n');ylabel('h(n)');
subplot(3,1,3);stem(ny,y);xlabel('n');ylabel('y(n)');
```

(4) 内容 3: 涉及功能函数 `conv_m`

```
function[y,ny]=conv_m(x,nx,h,nh)
nyb=nx(1)+nh(1);nye=nx(length(x))+nh(length(h));
ny=[nyb:nye]
y=conv(x,h);
```

6. 结果分析讨论

由仿真结果可知,系统是因果稳定的,单位脉冲响应有界(响应随 n 增大递减为零,稳定),并且有输入才有响应(因果),如图 8-1~图 8-3 所示。

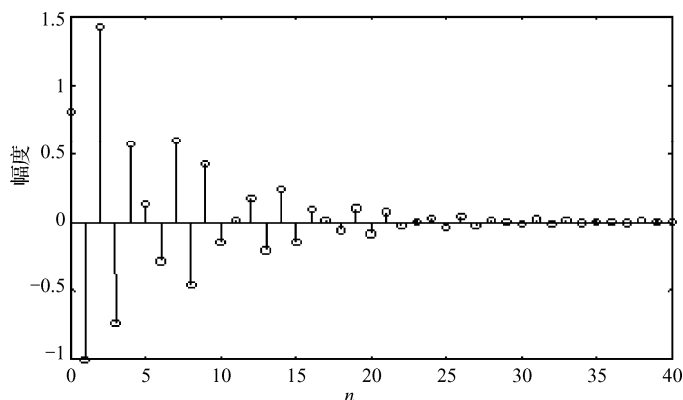


图 8-1 用 MATLAB 计算差分方程输出

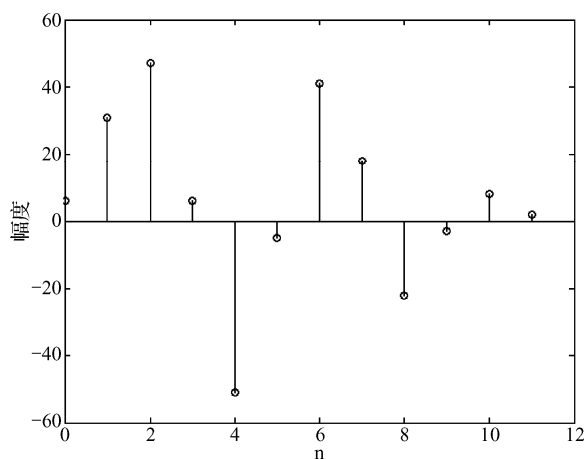


图 8-2 用 MATLAB 计算两个因果离散序列的卷积

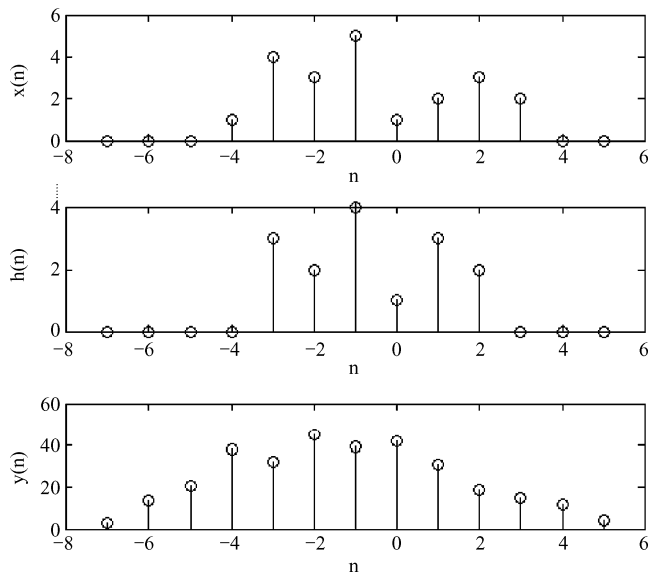


图 8-3 用 MATLAB 计算两个非因果离散序列的卷积

实验二 离散系统的时域特性

1. 实验目的

- (1) 掌握在时域求系统响应的方法。
- (2) 掌握时域离散系统的时域特性。
- (3) 通过实验判断系统稳定性。

2. 实验原理

在时域中, 描写系统特性的方法是差分方程和单位脉冲响应, 在频域可以用系统函数描述系统特性。已知输入信号可以由差分方程、单位脉冲响应或系统函数求出系统对于该输入信号的响应, 利用 `filter` 函数或 `conv` 函数计算输入信号和系统的单位脉冲响应的线性卷积, 求出系统的响应。

系统的时域特性指的是系统的线性移不变性质、因果性和稳定性。重点分析实验系统的稳定性, 包括观察系统的暂态响应和稳定响应。

系统的稳定性是指对任意有界的输入信号, 系统都能得到有界的系统响应。或者系统的单位脉冲响应满足绝对可和的条件。系统的稳定性由其差分方程的系数决定。

实际中检查系统是否稳定, 不可能检查系统对所有有界的输入信号, 输出是否都是有界输出, 或者检查系统的单位脉冲响应满足绝对可和的条件。可行的方法是在系统的输入端加入单位阶跃序列, 如果系统的输出趋近一个常数 (包括零), 就可以断定系统是稳定的。系统的稳态输出是指当 $n \rightarrow \infty$ 时系统的输出。如果系统稳定, 信号加入系统后, 系统输出的开始一段称为暂态效应, 随着 n 的增大, 幅度趋于稳定, 达到稳态输出。

注意在以下实验中均假设系统的初始状态为零。

3. 实验内容及步骤

- (1) 给定矩形脉冲 $x(n) = u(n) - u(n-10)$ 是脉冲响应为 $h(n) = (0.9)^n u(n)$ 的 LTI 系统的输入, 求输出 $y(n)$ 。利用 `filter` 函数对差分方程进行数值求解, 画出输入序列和脉冲响应。
- (2) 已知差分方程 $y(n] - y(n-1) + 0.9y(n-2) = x(n)$ 。

- ① 画出在 $n = -20, \dots, 100$ 的脉冲响应 $h(n)$ 。
 - ② 画出在 $n = -20, \dots, 100$ 的单位阶跃响应 $u(n)$ 。
 - ③ 判断由 $h(n)$ 表征的这个系统的稳定性。
- (3) 一个线性移不变系统由差分方程描述如下:

$$y(n) - 0.5y(n-1) + 0.25y(n-2) = x(n) + 2x(n-1) + x(n-3)$$

- ① 画出 $0 \leq n \leq 100$ 内的系统的脉冲响应, 并确定稳定性。
- ② 如果输入为 $x(n) = [5 + 3\cos(0.2\pi n) + 4\sin(0.6\pi n)]u(n)$, 求在 $0 \leq n \leq 200$ 内的响应 $y(n)$ 。

4. 内容分析

输入信号为有限长序列, 系统的单位脉冲响应是无限长序列, 由 $h(n)$ 求出 LTI 系统的差分方程描述, 由 $h(n)$ 表达式可得

$$(0.9)h(n-1) = (0.9)(0.9)^{n-1}u(n-1) = (0.9)^n u(n-1)$$

或 $h(n) - (0.9)h(n-1) = (0.9)^n u(n) - (0.9)^n u(n-1) = (0.9)[u(n) - u(n-1)] = (0.9)^n \delta(n)$

最后一步是根据 $\delta(n)$ 仅在 $n=0$ 为非零得出的, 根据定义, $h(n)$ 就是当输入是 $\delta(n)$ 时一个 LTI 系统的输出。所以用 $x(n)$ 代替 $\delta(n)$, $y(n)$ 代替 $h(n)$, 这个差分方程是

$$y(n) - 0.9y(n-1) = x(n)$$

再由差分方程导出 filter 函数的参数。

5. 实验报告及要求

- (1) 对各实验所得结果进行简单分析和解释。
- (2) 打印程序清单和要求的各信号波形。

6. 实验参考程序

- (1) 内容 1: 调用 filter 解差分方程

```
b=[1];a=[1,-0.9];
n=-5:50;x=stepseq(0,-5,50)-stepseq(10,-5,50);
h=0.9.^n;
h(1:5)=0;
y=filter(b,a,x);
subplot(3,1,1);stem(n,x);
ylabel('x(n)');axis([-5 50 min(x) max(x)]);
subplot(3,1,2);stem(n,h);
ylabel('h(n)');axis([-5 50 min(h) max(h)]);
subplot(3,1,3);stem(n,y);
xlabel('n');ylabel('y(n)');axis([-5,50,-0.5,8]);
```

内容 1 涉及的功能函数 stepseq

```
function[x,n]=stepseq(n0,n1,n2)
n=[n1:n2];x=[(n-n0)>=0];
```

- (2) 内容 2: 稳定性分析

```
b=[1];a=[1,-1,0.9];
x=impseq(0,-20,120);n=[-20:120];
h=filter(b,a,x);
subplot(2,1,1);stem(n,h);
title('脉冲响应');xlabel('n');ylabel('h(n)')
x=stepseq(0,-20,120);
s=filter(b,a,x);
subplot(2,1,2);stem(n,s);
title('阶跃响应');xlabel('n');ylabel('u(n)')
```

内容2涉及的功能函数 `impzseq`

```
function[x,n]=impzseq(n0,n1,n2)
n=[n1:n2];x=[(n-n0)==0];
```

(3) 内容3: 稳定性分析

```
b=[1,2,1];a=[1,-0.5,0.25];
x=impzseq(0,0,100);n=[0:100];
h=filter(b,a,x);
subplot(2,1,1);stem(n,h);
title('脉冲响应');xlabel('n');ylabel('h(n)')
x1=5+3*cos(0.2*pi*n)+4*sin(0.6*pi*n);
y=filter(b,a,x1);
subplot(2,1,2);stem(n,y);
title('在sin和cos作用下的响应');xlabel('n');ylabel('y(n)')
```

7. 结果分析讨论

结果如图8-4~图8-6所示。

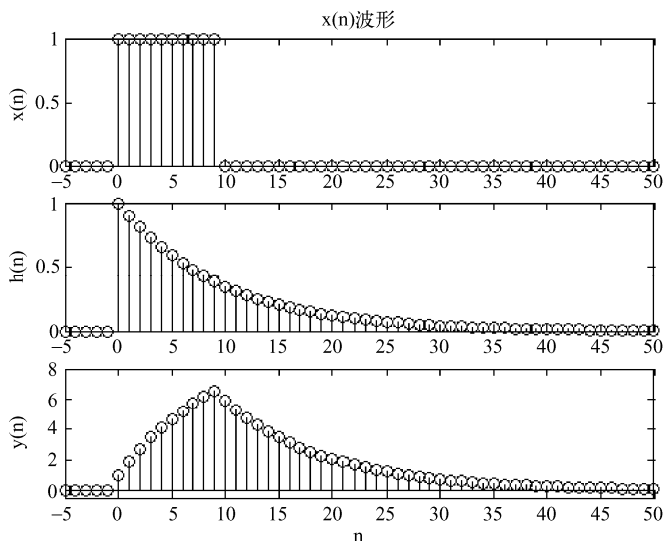


图8-4 调用 `filter` 解差分方程仿真结果

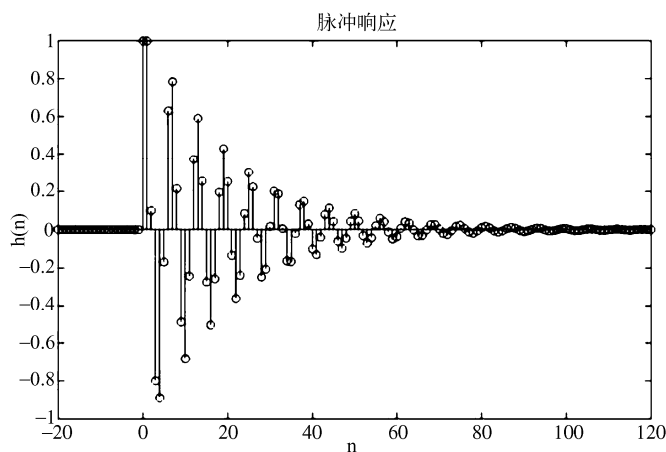


图8-5 稳定性分析方面的仿真结果1

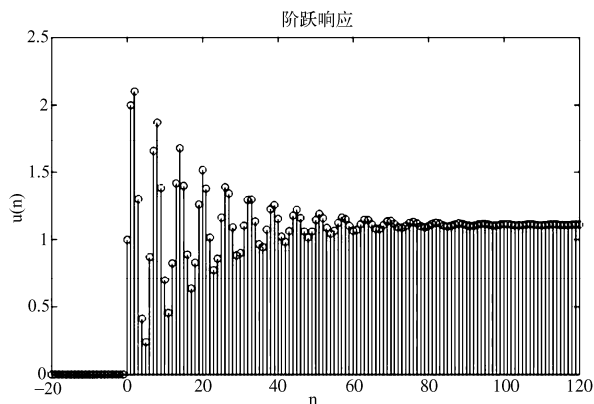


图 8-6 稳定性分析方面的仿真结果 2

由 $h(n)$ 脉冲响应图像可以看出, 当 $n > 120$ 时, $h(n)$ 的值就为零了, 这意味着系统是稳定的。另一种方法是利用 MATLAB 的 roots 函数, 如:

```
z=roots(a);
magz=abs(z)
magz =
    0.9487
    0.9487
```

因为每个根的幅度都小于 1, 都在 z 平面的单位圆内, 所以系统是稳定的。稳定性分析仿真结果如图 8-7 所示。

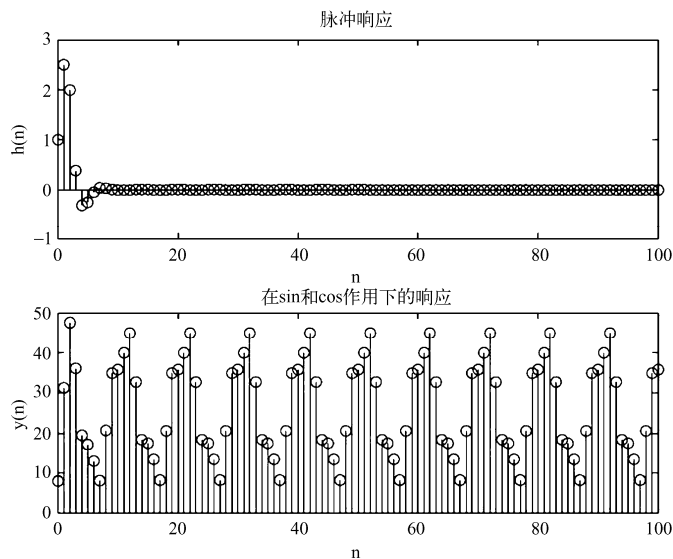


图 8-7 稳定性分析仿真结果

由 $h(n)$ 脉冲响应信号可以看出, 当 $n > 10$ 时, $h(n)$ 的值就为零了, 这意味着系统是稳定的。第二个图反映了输入为 \sin 和 \cos 函数的加权叠加的响应 $y(n)$ 。

实验三 时域抽样

1. 实验目的

- (1) 掌握时域抽样定理。
- (2) 了解模拟信号抽样前后频谱的变化。

2. 实验原理

时域抽样定理的要点是:

(1) 对模拟信号 $x_a(t)$ 以间隔 T 进行时域等间隔理想抽样, 形成的抽样信号的频谱 $\hat{X}(j\Omega)$ 是原模拟信号频谱 $X_a(j\Omega)$ 以抽样角频率 $\Omega_s (\Omega_s = 2\pi/T)$ 为周期进行周期延拓的。

(2) 抽样频率满足抽样定理, Ω_s 必须大于等于模拟信号最高频率的两倍 (理想情况下), 才能使抽样信号的频谱不产生频谱混叠。工程实际中抽样频率通常大于连续信号中最高频率的 3~5 倍或更高。

利用计算机计算并不方便, 下面导出另外一个公式, 以使用计算机上进行实验。

理想抽样信号 $\hat{x}_a(t)$ 和模拟信号 $x_a(t)$ 之间的关系为

$$\hat{x}_a(t) = x_a(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

对上式进行傅里叶变换, 得到

$$\hat{X}_a(j\Omega) = X(e^{j\omega})|_{\omega=\Omega T}$$

上式说明理想抽样信号的傅里叶变换可用相应的抽样序列的傅里叶变换得到, 只要将自变量 ω 用 ΩT 代替即可。

3. 实验内容及步骤

时域抽样理论的验证。

给定模拟信号, $x_a(t) = e^{-1000|t|}$, t 的单位 ms。要求:

- (1) 利用 MATLAB 绘制时域波形和频谱图;
- (2) 分别用 $f_s = 5000$ 和 $f_s = 1000$ 对给定的 $x_a(t)$ 进行抽样, 并绘制频谱。

4. 实验报告及要求

- (1) 运行程序, 打印要求显示的图形。
- (2) 分析比较实验结果, 简述由实验得到的主要结论。
- (3) 附上程序清单和有关曲线。

5. 实验参考程序

- (1) 内容 1: MATLAB 绘制出时域波形和频谱图

```
%给定模拟信号
Dt=0.00005;t=-0.005:Dt:0.005;
xa=exp(-1000*abs(t));
Wmax=2*pi*2000;
K=500;
k=0:1:K;
W=k*Wmax/K;
Xa=xa*exp(-j*t'*W)*Dt;Xa=real(Xa);%幅频响应
W=[-fliplr(W),W(2:501)];
Xa=[fliplr(Xa),Xa(2:501)];
subplot(1,1,1)
subplot(2,1,1);plot(t*1000,xa);
xlabel('t/ms');ylabel('xa(t)');
title('模拟信号')
```

```
subplot(2,1,2);plot(W/(2*pi*1000),Xa*1000);
xlabel('频率 kHz');ylabel('Xa(j\omega)*1000');
title('连续时间傅里叶变换')
```

(2) 内容 2: 抽样频率为 5000Hz 程序

```
Dt=0.00005;t=-0.005:Dt:0.005;xa=exp(-1000*abs(t));
Ts=0.0002;n=-25:1:25;x=exp(-1000*abs(n*Ts));
k=-300:300;w=(pi/100)*k;
X=x*(exp(-j*pi/100)).^(n*k);
X=abs(X);
subplot(2,1,1);plot(t*1000,xa);
xlabel('t/ms');ylabel('x1(n)');
title('抽样信号');hold on;
stem(n*Ts*1000,x);
subplot(2,1,2);plot(w/pi,X);
xlabel('以\pi为单位的频率');ylabel('X1(w)');
title('离散时间傅里叶变换');
```

(3) 内容 3: 抽样频率为 1000Hz 程序

```
Dt=0.00005;t=-0.005:Dt:0.005;xa=exp(-1000*abs(t));
Ts=0.001;n=-8:1:8;x=exp(-1000*abs(n*Ts));
k=-300:300;w=(pi/100)*k;
X=x*(exp(-j*pi/100)).^(n*k);
X=abs(X);
subplot(2,1,1);plot(t*1000,xa);
xlabel('t/ms');ylabel('x2(n)');
title('1000Hz 抽样信号');hold on;
stem(n*Ts*1000,x);hold off;
subplot(2,1,2);plot(w/pi,X);
xlabel('以\pi为单位的频率');ylabel('X2(w)');
title('离散时间傅里叶变换');
```

6. 结果分析讨论

时域抽样理论运行结果如图 8-8、图 8-9、图 8-10 所示, 抽样序列的频谱的确是以抽样频率为周期对模拟信号频谱的周期延拓。当抽样频率为 5000Hz 时, 频谱混叠很小; 当抽样频率为 1000Hz 时, 频谱混叠很严重。

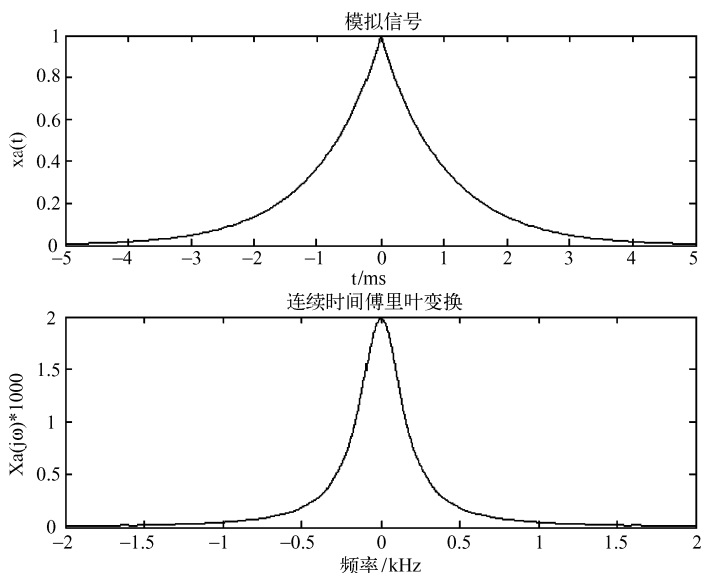


图 8-8 模拟信号及其频谱

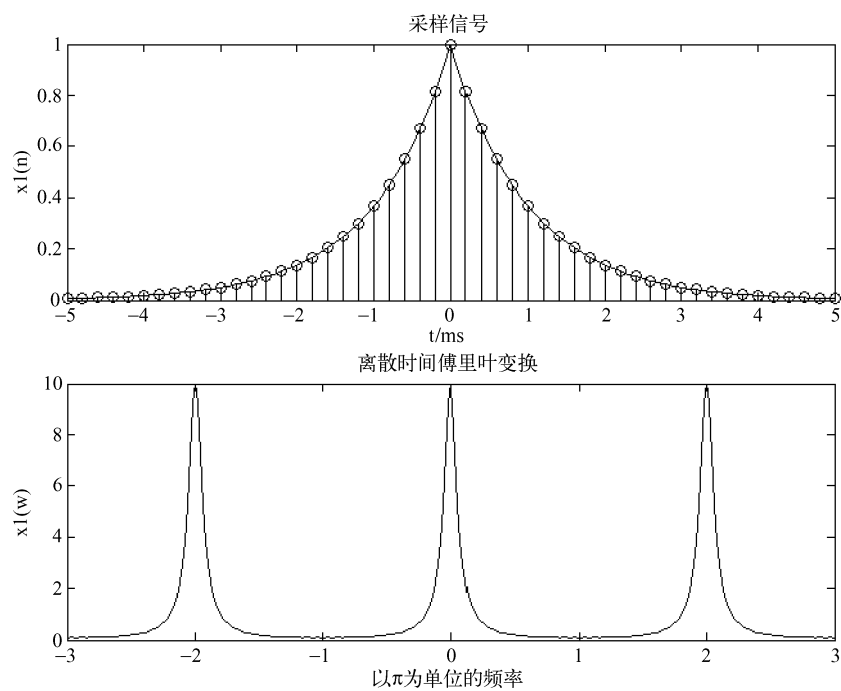


图 8-9 抽样率为 5000Hz 时的信号及频谱

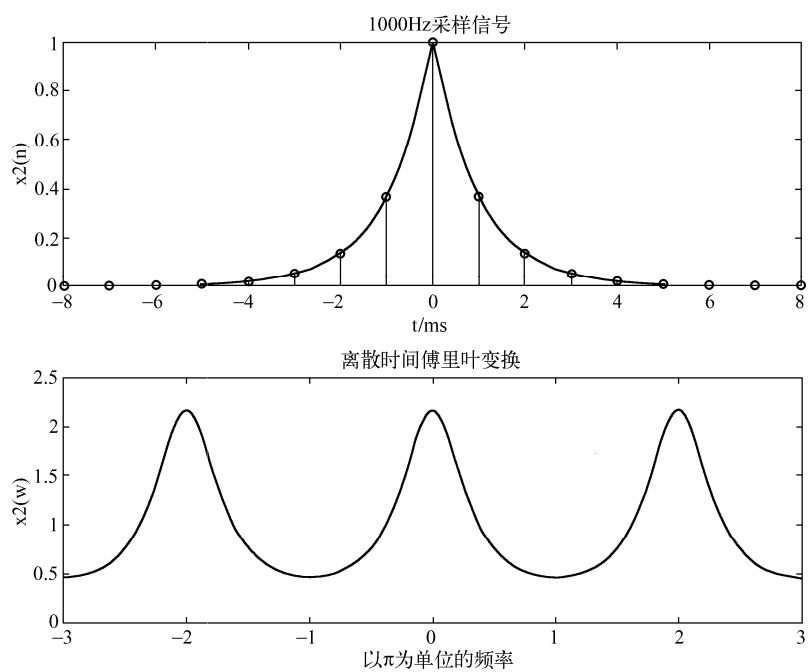


图 8-10 抽样率为 1000Hz 时的信号及频谱

实验四 频域抽样

1. 实验目的

- (1) 频域抽样定理及其对频域抽样点数选择的指导作用。
- (2) 掌握频域抽样引起时域周期化的概念。

2. 实验原理

时域抽样定理的要点是：

对信号 $x(n)$ 的频谱函数 $X(e^{j\omega})$ 在 $[0, 2\pi]$ 上等间隔抽样 N 点，则：

频域抽样点数 N 必须大于等于时域离散信号的长度 M ($N \geq M$)，才能使时域不产生混叠，则 N 点 IDFT[$X_N(k)$] 得到的序列 $x_N(n)$ 就是原序列 $x(n)$ ，即 $x_N(n) = x(n)$ 。如果 $N > M$ ， $x_N(n)$ 比原序列尾部多 $N-M$ 个零点；如果 $N < M$ ，则 $x_N(n) = \text{IDFT}[X_N(k)]$ 发生了时域混叠失真，而且 $x_N(n)$ 的长度 N 也比 $x(n)$ 的长度 M 短，因此 $x_N(n)$ 与 $x(n)$ 不相同。

在数字信号处理的应用中，只要涉及时域或频域抽样，都必须服从这两个抽样理论的要点。

对比实验三的时域抽样原理，得到一个有用的结论，这两个抽样理论具有对偶性：“时域抽样，频谱周期延拓；频域抽样，时域信号周期延拓”。

3. 实验内容及步骤

频域抽样理论的验证。

给定长度为 26 的三角波序列 $x(n)$ ，编写程序分别对频谱函数 $X(e^{j\omega}) = \text{FT}[x(n)]$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上等间隔抽样 32 点和 16 点，得到 $X_{32}(k)$ 和 $X_{16}(k)$ ，再分别对 $X_{32}(k)$ 和 $X_{16}(k)$ 进行 32 点和 16 点 IFFT，得到 $x_{32}(n)$ 和 $x_{16}(n)$ 。要求：

- ① 分别画出 $X(e^{j\omega})$ 、 $X_{32}(k)$ 和 $X_{16}(k)$ 的幅度谱。
- ② 绘图显示 $x(n)$ 、 $x_{32}(n)$ 和 $x_{16}(n)$ 的波形，进行对比和分析，验证总结频域抽样理论。

提示：频域抽样用以下方法容易编程实现。

① 直接调用 MATLAB 函数 `fft` 计算 $X_{32}(k) = \text{FFT}[x(n)]_{32}$ ，就可得到 $X(e^{j\omega})$ 在 $[0, 2\pi]$ 的 32 点频率域抽样。

② 抽取 $X_{32}(k)$ 的偶数点，即可得到 $X(e^{j\omega})$ 在 $[0, 2\pi]$ 的 16 点频率域抽样 $X_{16}(k)$ ，即

$$X_{16}(k) = X_{32}(2k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, 15$$

③ 当然也可以按照频域抽样理论，先将信号 $x(n)$ 以 16 为周期进行周期延拓，取其主值区 (16 点)，再对其进行 16 点 DFT (FFT)，得到的就是 $X(e^{j\omega})$ 在 $[0, 2\pi]$ 的 16 点频率域抽样 $X_{16}(k)$ 。

4. 实验报告及要求

- (1) 运行程序，打印要求显示的图形。
- (2) 分析比较实验结果，简述由实验得到的主要结论。
- (3) 附上程序清单和有关曲线。

5. 实验参考程序

```
M=27;N=32;n=0:M;
%产生 M 长三角波序列 x(n)
xa=0:floor(M/2); xb=ceil(M/2)-1:-1:0; xn=[xa,xb];
Xk=fft(xn,1024); %1024 点 FFT[x(n)]，用于近似序列 x(n) 的 TF
X32k=fft(xn,32); %32 点 FFT[x(n)]
x32n=ifft(X32k); %32 点 IFFT[X32(k)] 得到 x32(n)
X16k=X32k(1:2:N); %隔点抽取 X32k 得到 X16(k)
x16n=ifft(X16k,N/2); %16 点 IFFT[X16(k)] 得到 x16(n)
```

```

subplot(3,2,2);stem(n,xn,'. ');box on
title(' (b) 三角波序列 x(n) ');xlabel('n');ylabel('x(n) ');axis([0,32,0,20])
k=0:1023;wk=2*k/1024; %
subplot(3,2,1);plot(wk,abs(Xk));title(' (a) FT[x(n)] ');
xlabel('\omega/\pi ');ylabel('|X(e^{j\omega})| ');axis([0,1,0,200])
k=0:N/2-1;
subplot(3,2,3);stem(k,abs(X16k),'. ');box on
title(' (c) 16 点频域抽样 ');xlabel('k');ylabel('|X_1_6(k)| ');axis([0,8,0,
200])

n1=0:N/2-1;
subplot(3,2,4);stem(n1,x16n,'. ');box on
title(' (d) 16 点 IDFT[X_1_6(k)] ');xlabel('n');ylabel('x_1_6(n) ');axis([0,
32,0,20])

k=0:N-1;
subplot(3,2,5);stem(k,abs(X32k),'. ');box on
title(' (e) 32 点频域抽样 ');xlabel('k');ylabel('|X_3_2(k)| ');axis([0,16,0,
200])

n1=0:N-1;
subplot(3,2,6);stem(n1,x32n,'. ');box on
title(' (f) 32 点 IDFT[X_3_2(k)] ');xlabel('n');ylabel('x_3_2(n) ');axis([0,32,
0,20])

```

6. 结果分析讨论

频域抽样理论运行结果如图 8-11 所示, 频域抽样点数 N 必须大于等于时域离散信号的长度 M ($N \geq M$), 才能使时域不产生混叠, 所以当抽样点数 32 大于序列长度 26 时, 不产生混叠, 当抽样点数 16 小于序列长度时, 发生混叠。

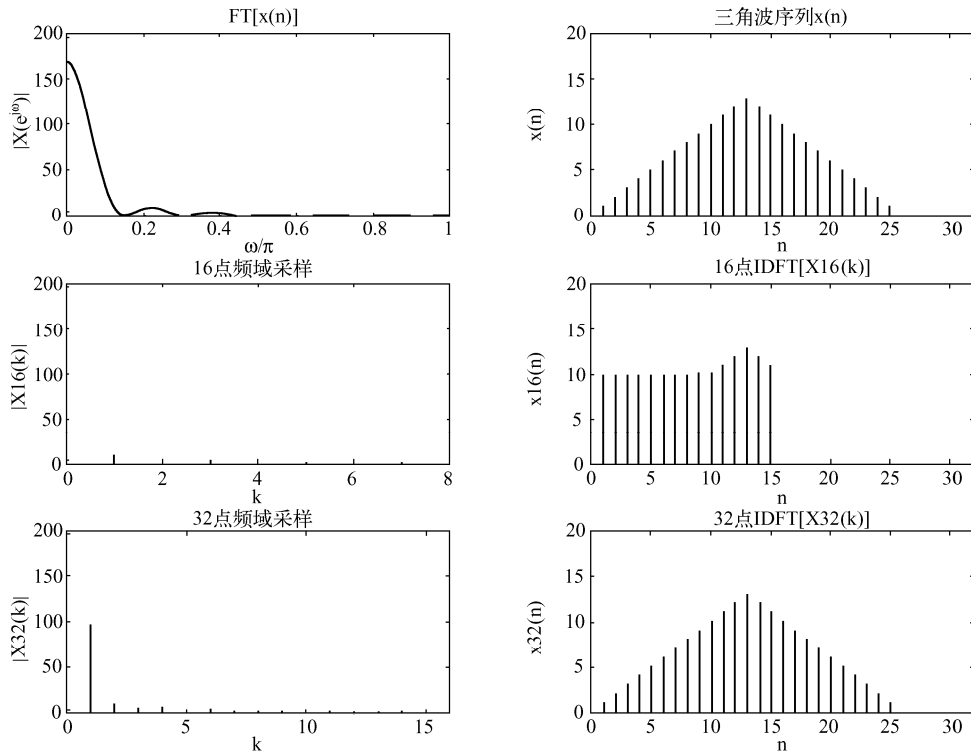


图 8-11 频域抽样理论运行结果

实验五 离散系统的复频域分析

1. 实验目的

- (1) 掌握利用 Z 变换对系统进行复频域分析的方法。
- (2) 掌握系统零、极点的绘制方法。
- (3) 通过复频域分析系统稳定性、频率特性。
- (4) 熟悉 Z 变换的应用。

2. 实验原理

离散系统的时域方程为

$$\sum_{k=0}^N d_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M p_k x(n-k)$$

其变换域分析方法如下

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) \Leftrightarrow Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

频域系统的频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

Z 域

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) \Leftrightarrow Y(z) = X(z)H(z)$$

系统的转移函数为

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$\text{分解因式 } H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M p_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^N d_i z^{-i}} = K \frac{\prod_{i=1}^M (1 - \xi_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^N (1 - \lambda_i z^{-1})}, \text{ 其中 } \xi_i \text{ 和 } \lambda_i \text{ 称为零、极点。}$$

在 MATLAB 中, 可以用函数 `[z,p,K]=tf2zp(num,den)` 求得有理分式形式的系统转移函数的零、极点, 用函数 `zplane(z,p)` 绘出零、极点分布图; 也可以用函数 `zplane(num,den)` 直接绘出有理分式形式的系统转移函数的零、极点分布图。

另外, 在 MATLAB 中, 可以用函数 `[r,p,k]=residuez(num,den)` 完成部分分式展开计算; 可以用函数 `sos=zp2sos(z,p,K)` 完成将高阶系统分解为 2 阶系统的串联。

判断 z 域因果 LTI 稳定性: 当且仅当系统函数 $H(z)$ 的全部极点位于单位圆内时, 一因果 LTI 系统是稳定的。

3. 实验内容及步骤

- (1) 求下列序列的 Z 变换并用 `zplane` 画出零、极点分布图。

$$x(n) = \{1, 2, 1, 3\}, \text{ 该序列的 Z 变换为 } X(z) = 1 + 2z^{-1} + z^{-2} + 3z^{-3} = \frac{z^3 + 2z^2 + z + 3}{z^3}。$$

(2) 求下列直接型系统函数的零、极点, 并将它转换成二阶节形式

$$H(z) = \frac{1 - 0.1z^{-1} - 0.3z^{-2} - 0.3z^{-3} - 0.2z^{-4}}{1 + 0.1z^{-1} + 0.2z^{-2} + 0.2z^{-3} + 0.5z^{-4}}$$

(3) 给定因果系统 $y(n) = 0.9y(n-1) + x(n)$, 要求:

- ① 求系统函数 $H(z)$ 并画出零、极点示意图;
- ② 画出系统的幅频特性 $|H(e^{j\omega})|$ 和相频特性 $\varphi(\omega)$;
- ③ 求脉冲响应 $h(n)$, 并画出序列图。

4. 实验报告及要求

- (1) 报告中要给出实验的 MATLAB 程序, 并对每个语句给出注释, 说明语句作用。
- (2) 粘贴实验结果图。

5. 实验参考程序

(1) 内容 1 参考程序

```
b=[1, 2, 1, 3];%H(z)分子系数
a=[1, 0, 0, 0];%H(z)分母系数
zplane(b,a);%画零、极点分布图
```

(2) 内容 2 参考程序

```
num=[1, -0.1, -0.3, -0.3, -0.2];
den=[1, 0.1, 0.2, 0.2, 0.5];
[z,p,k]=tf2zp(num,den);
m=abs(p);
disp('零点');disp(z);
disp('极点');disp(p);
disp('增益系数');disp(k);
sos=zp2sos(z,p,k);
disp('二阶节');disp(real(sos));
zplane(num,den)
```

(3) 内容 3 参考程序

```
b=[1,0];a=[1,-0.9];
figure
zplane(b,a);
[H,w]=freqz(b,a,200,'whole');
magH=abs(H(1:101));phaH=angle(H(1:101));
hw=w(1:101);
figure
subplot(2,1,1);plot(hw/pi,magH);
xlabel('频率单位:  $\pi$ ');ylabel('|H(jw)|');
title('幅频响应');
subplot(2,1,2);plot(hw/pi,phaH/pi);
xlabel('频率单位:  $\pi$ ');ylabel('相位单位:  $\pi$ ');
title('相频响应');
%脉冲响应
[h,T]=impz(b,a,50);
figure
stem(T,h);
xlabel('n');ylabel('h(n)');
```

6. 结果分析讨论

- (1) 内容 1 结果分析如图 8-12 所示。

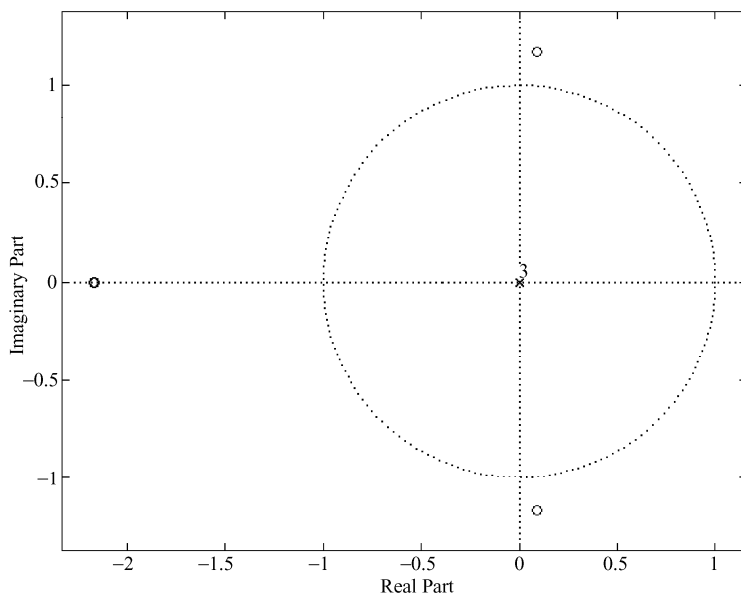


图 8-12 复频域分析的零、极点图

(2) 内容 2 中, 输入到 num 和 den 的分别为分子和分母多项式的系数。计算求得零、极点增益系数和二阶节的系数, 在 MATLAB 的 Command Window 观察:

```
>> 零点
    0.9615
   -0.5730
  -0.1443 + 0.5850i
  -0.1443 - 0.5850i
极点
    0.5276 + 0.6997i
    0.5276 - 0.6997i
   -0.5776 + 0.5635i
   -0.5776 - 0.5635i
增益系数
    1
二阶节
    1.0000   -0.3885   -0.5509    1.0000    1.1552    0.6511
    1.0000    0.2885    0.3630    1.0000   -1.0552    0.7679
```

系统函数的二阶节形式为

$$H(z) = \frac{1 - 0.3885z^{-1} - 0.5509z^{-2}}{1 + 0.2885z^{-1} + 0.3630z^{-2}} \cdot \frac{1 + 1.1552z^{-1} + 0.6511z^{-2}}{1 - 1.0552z^{-1} + 0.7679z^{-2}}$$

零、极点图如图 8-13 所示。

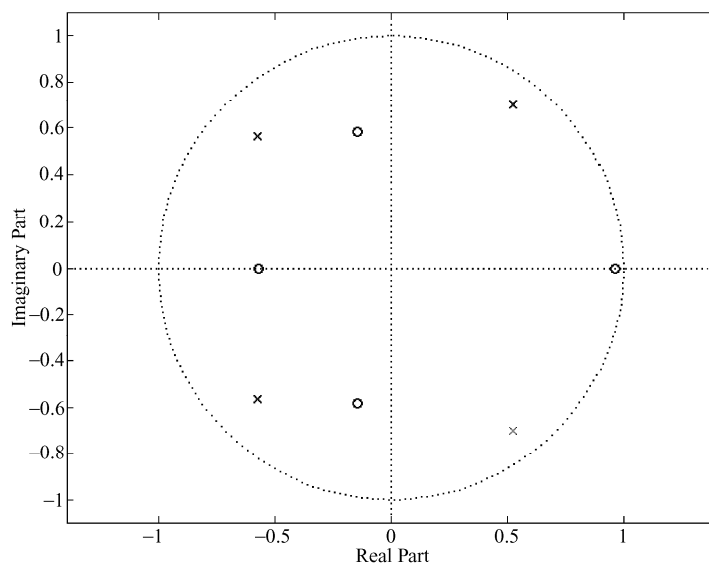


图 8-13 内容 2 系统函数的零、极点图

(3) 内容 3 中, 零、极点图如图 8-14 所示, $H(z)$ 的频率特性如图 8-15 所示, 脉冲响应序列如图 8-16 所示。

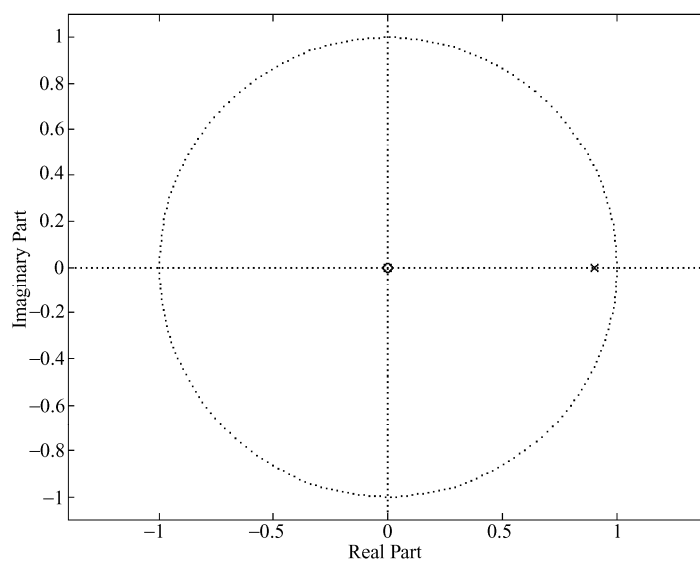


图 8-14 内容 3 系统函数的零、极点图

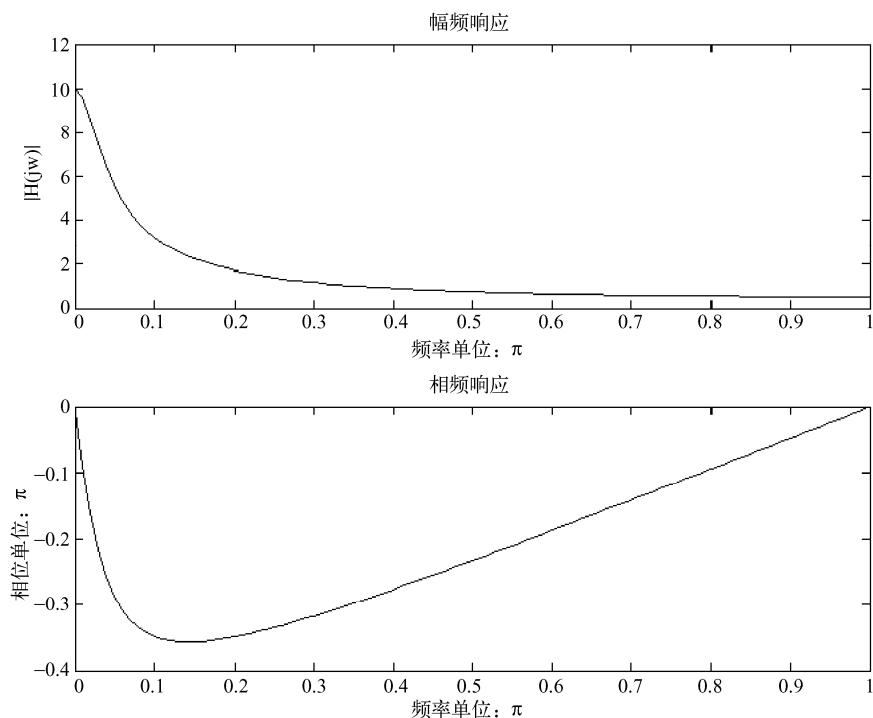
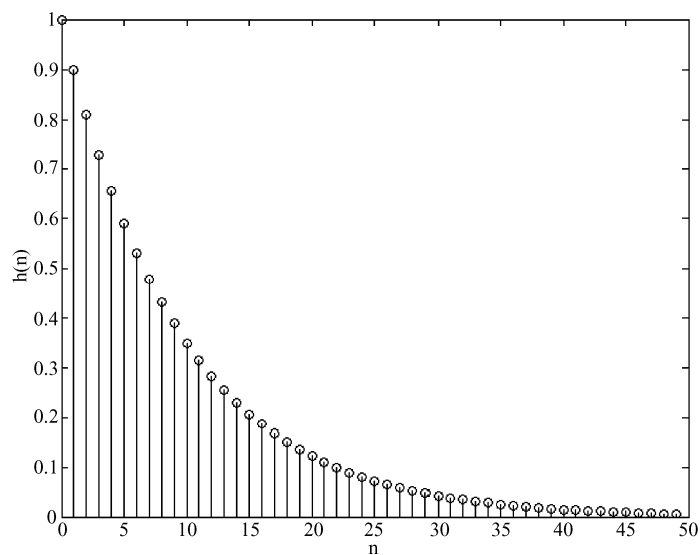
图 8-15 内容 3 $H(z)$ 频率特性

图 8-16 内容 3 脉冲响应序列

实验六 DFT/FFT 频谱分析及应用

1. 实验目的

(1) 加深对 DFT/FFT 的理解, 熟悉 MATLAB 中的有关函数。

(2) 学习用 FFT 对连续信号和时域离散信号进行谱分析的方法。

(3) 了解 FFT 在系统分析中的应用。

2. 实验原理

在各种信号序列中,有限长序列占重要地位。对有限长序列可以利用离散傅里叶变换(DFT)进行分析。DFT 不但可以很好地反映序列的频谱特性,而且易于用快速算法(FFT)在计算机上进行分析。有限长序列的 DFT 是其 Z 变换在单位圆上的等距抽样,或者说是序列傅里叶变换的等距抽样,因此可以用于序列的谱分析。

所谓谱分析,就是计算信号的频谱,包括振幅谱、相位谱和功率谱。在利用 FFT 对模拟信号进行谱分析时,应将模拟信号离散化,以得到离散时间信号,同时考虑谱分析中参数的选择。对信号进行谱分析的重要问题是频谱分辨率和分析误差。在保持分辨率不变的情况下,若希望增加所分析的信号的最高频率,或在保持信号最高频率不变的情况下,提高分辨率的唯一办法是增加在记录长度内的取样点数 N ,那么 N 必须满足条件:

$$N \geq \frac{2f_0}{F}$$

式中, f_0 是连续信号最高频率, F 是频率分辨率。可以根据此式选择 FFT 的变换区间 N 。误差主要来自 FFT 做频谱分析的过程,得到的是离散谱,而信号(周期信号除外)是连续谱,只有当 N 较大时,离散谱的包络才能逼近于连续谱,因此 N 要适当选择大一些。

周期信号的频谱是离散谱,只有用整数倍周期的长度做 FFT,得到的离散谱才能代表周期信号的频谱。如果不知道信号周期,可以尽量选择信号的观察时间长一些。

MATLAB 信号处理工具箱中提供了 4 个 FFT 内部函数用于计算 DFT 和 IDFT,它们分别是: `fft(x)`, `fft(x,L)`, `ifft(X)`, `ifft(X,L)`。

3. 实验步骤及内容

(1) 对模拟信号 $x(t) = 2\sin(4\pi t) + 5\cos(8\pi t)$ 进行抽样,用 DFT 进行谱分析,如何确定 DFT 抽样率和抽样点数?

(2) 已知一连续信号为 $x(t) = \cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t)$,其中 $f_1=120\text{Hz}$, $f_2=140\text{Hz}$,用 FFT 进行分析时,选取取样频率及能够分辨两个谱峰所需要的点数,绘制频谱。

(3) 对模拟周期信号进行谱分析

$$x(t) = \cos 8\pi t + \cos 16\pi t + \cos 20\pi t$$

选择抽样频率 $f_s=64\text{Hz}$,变换区间 $N=16,32,64$ 三种情况进行谱分析。分别打印其幅频特性,并进行分析和讨论。

4. 实验报告及要求

完成各个实验任务和要求。附上程序清单和有关曲线。

5. 实验参考程序

(1) 内容 1 参考程序

```
N=8;
fs=16;
n=0:N-1;
w=fs*n/N;
x=2*sin(4*pi*n/fs)+5*cos(8*pi*n/fs);
X=fft(x,N);
figure(1)
stem(w(1:N/2),abs(X(1:N/2)),'k','filled');grid;
```

```
xlabel('Hz');ylabel('|X(f)|');
title('N=8');
% N取6或32时进行对比讨论
```

(2) 内容2 参考程序

```
N=21;L=256;
f1=120;f2=140;fs=400;
T=1/fs;ws=2*pi*fs;
n=0:N-1;
x=cos(2*pi*f1*n*T)+cos(2*pi*f2*n*T);
X=fftshift(fft(x,L));
w=(-ws/2+(0:L-1)*ws/L)/(2*pi);
figure(2)
subplot(2,1,1);plot(w,abs(X));
xlabel('Hz');ylabel('幅度谱');axis([-200,200,0,15]);
title('N=21');
N=11;n=0:N-1;
x=cos(2*pi*f1*n*T)+cos(2*pi*f2*n*T);
X=fftshift(fft(x,L));
subplot(2,1,2);plot(w,abs(X));
xlabel('Hz');ylabel('幅度谱');axis([-200,200,0,15]);
title('N=11');
```

(3) 内容3 参考程序

```
figure(3)
fs=64;T=1/fs;
N=16;n=0:N-1;          %FFT的变换区间N=16
xnT=cos(8*pi*n*T)+cos(16*pi*n*T)+cos(20*pi*n*T); %对x(t)16点抽样
Xk16=fft(xnT);          %计算xnT的16点DFT
Xk16=fftshift(Xk16);    %将零频率移到频谱中心
Tp=N*T;F=1/Tp;          %频率分辨率F
k=-N/2:N/2-1;fk=k*F; %产生16点DFT对应的抽样点频率(以零频率为中心)
subplot(3,1,1);stem(fk,abs(Xk16),'.');box on %绘制8点DFT的幅频特性图
title('16点|DFT[x(nT)]|');xlabel('f(Hz)');ylabel('幅度');
axis([-N*F/2-1,N*F/2-1,0,1.2*max(abs(Xk16))])
N=32;n=0:N-1;          %FFT的变换区间N=16
xnT=cos(8*pi*n*T)+cos(16*pi*n*T)+cos(20*pi*n*T); %对x(t)32点抽样
Xk32=fft(xnT);          %计算xnT的32点DFT
Xk32=fftshift(Xk32);    %将零频率移到频谱中心
Tp=N*T;F=1/Tp;          %频率分辨率F
k=-N/2:N/2-1;fk=k*F; %产生16点DFT对应的抽样点频率(以零频率为中心)
subplot(3,1,2);stem(fk,abs(Xk32),'.');box on %绘制8点DFT的幅频特性图
title('32点|DFT[x(nT)]|');xlabel('f(Hz)');ylabel('幅度');
axis([-N*F/2-1,N*F/2-1,0,1.2*max(abs(Xk32))])
N=64;n=0:N-1;          %FFT的变换区间N=16
xnT=cos(8*pi*n*T)+cos(16*pi*n*T)+cos(20*pi*n*T); %对x(t)64点抽样
Xk64=fft(xnT);          %计算xnT的64点DFT
Xk64=fftshift(Xk64);    %将零频率移到频谱中心
Tp=N*T;F=1/Tp;          %频率分辨率F
k=-N/2:N/2-1;fk=k*F; %产生16点DFT对应的抽样点频率(以零频率为中心)
subplot(3,1,3);stem(fk,abs(Xk64),'.');box on %绘制8点DFT的幅频特性图
title('64点|DFT[x(nT)]|');xlabel('f(Hz)');ylabel('幅度');
axis([-N*F/2-1,N*F/2-1,0,1.2*max(abs(Xk64))])
```

6. 结果分析讨论

(1) 实验内容 1, 根据给定模拟信号, $f_1 = 2\text{Hz}$, $f_2 = 4\text{Hz}$, 所以满足抽样定理 $f_s \geq 2f_h$, 取抽样频率 $f_s = 16\text{Hz}$, $F = 4 - 2 = 2\text{Hz}$, 根据 $N \geq 2f_0 / F$, 所以 $N \geq 8$, 当 $N=6$ 时, 不满足抽样点数, 所以频谱在时域混叠。而当 $N=32$ 时, 满足抽样点数, 频谱中能够看到有两个频率成分, 在 $f_1 = 2\text{Hz}$ 、 $f_2 = 4\text{Hz}$ 处有谱线。如图 8-17~图 8-19 所示。

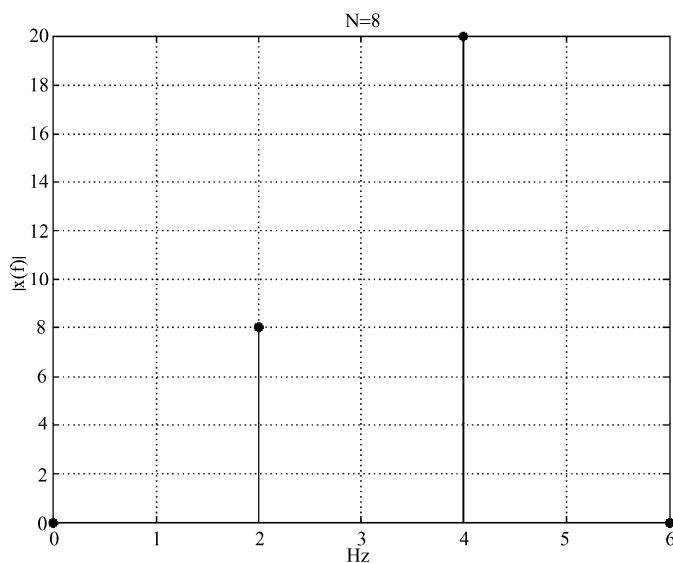


图 8-17 内容 1 抽样点数 $N=8$ 时的频谱

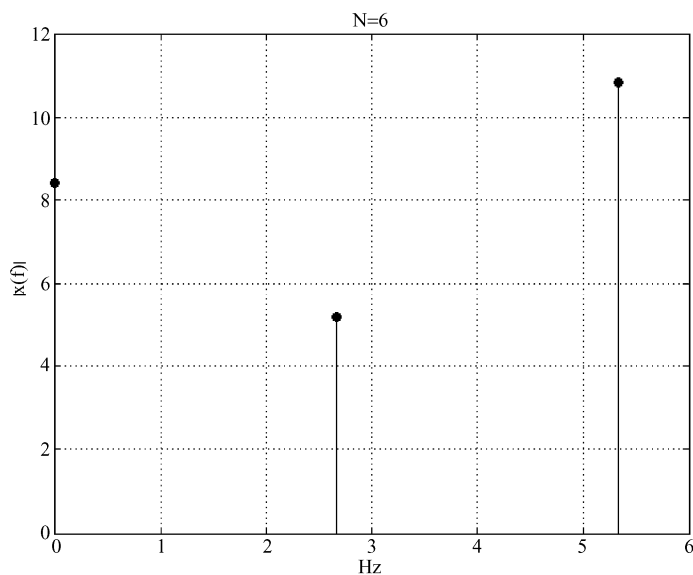
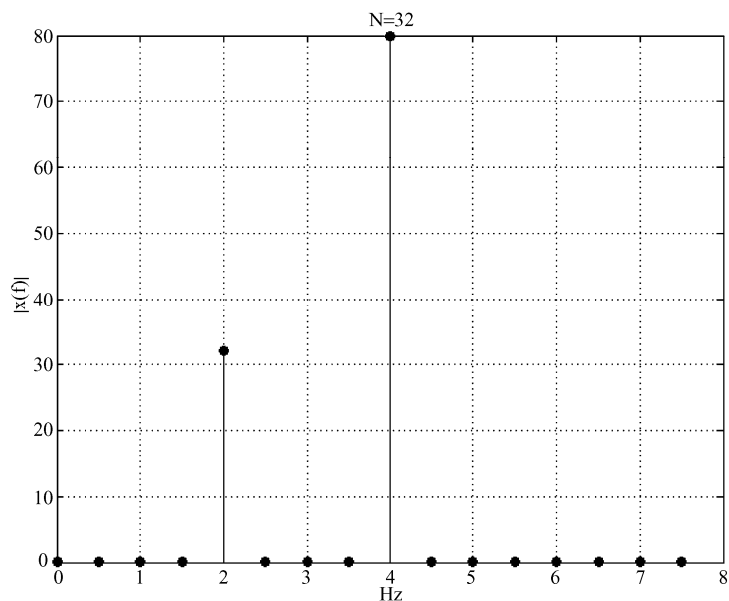


图 8-18 内容 1 抽样点数 $N=6$ 时的频谱

图 8-19 内容 1 抽样点数 $N=32$ 时的频谱

(2) 实验内容 2, $f_1 = 120\text{Hz}$, $f_2 = 140\text{Hz}$, 取抽样频率 $f_s = 400\text{Hz}$, $F = 140 - 120 = 20\text{Hz}$, 所以 $N=20$, 显然, 当 $N=21$ 时, 能把 f_1 和 f_2 两个谱峰分辨出来。当 $N=11$ 时, 两个谱峰分辨不出来。如图 8-20 所示。

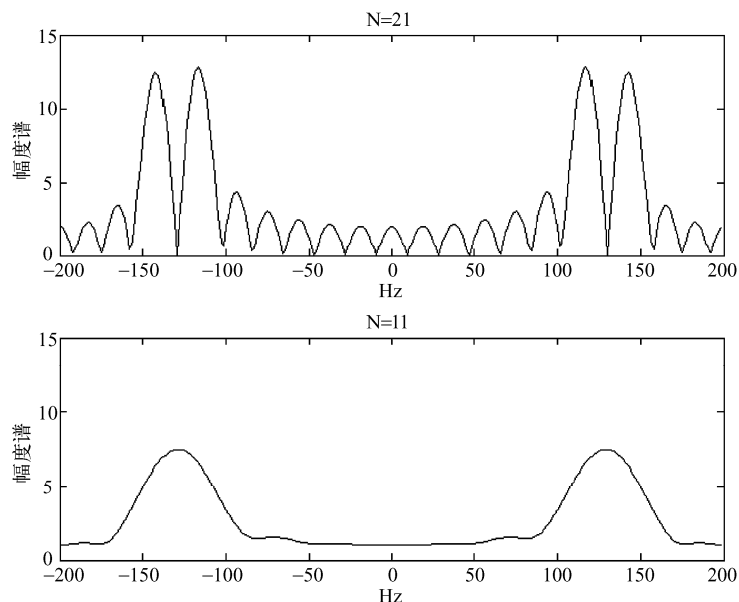


图 8-20 内容 2 频谱图

(3) 实验内容 3, 对模拟周期信号谱分析

$$x(t) = \cos 8\pi t + \cos 16\pi t + \cos 20\pi t$$

$x(t)$ 有 3 个频率成分, $f_1 = 4\text{Hz}$, $f_2 = 8\text{Hz}$, $f_3 = 10\text{Hz}$, 所以 $x(t)$ 的周期为 0.5s 。抽样频率 $f_s = 64\text{Hz}$ 。变换区间 $N=16$ 时, 观察时间 $T_p = 16T = 0.25\text{s}$, 不是 $x(t)$ 的整数倍周期, 所以所得频谱不正确, 如图 8-21

上图所示。变换区间 $N=32, 64$ 时，观察时间 $T_p=0.5s, 1s$ ，是 $x(t)$ 的整数周期，所以所得频谱正确，如图 8-21 下两幅图所示。图中 3 根谱线正好位于 4Hz、8Hz、10Hz 处。变换区间 $N=64$ 时，频谱幅度是变换区间 $N=32$ 时的 2 倍，这种结果正好验证了用 DFT 对中期序列谱分析的理论。

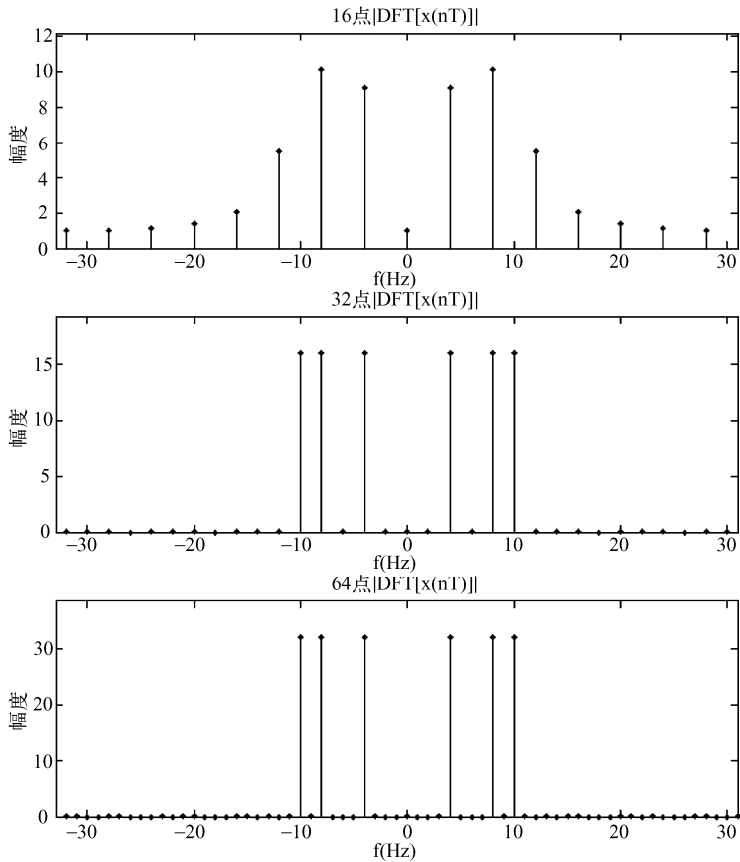


图 8-21 内容 3 频谱图

实验七 IIR 数字滤波器的设计

1. 实验目的

- (1) 掌握双线性变换法及冲激响应不变法的设计方法及其原理。
- (2) 熟悉用双线性变换法及冲激响应不变法设计 IIR 数字滤波器的 MATLAB 编程。
- (3) 观察双线性变换法及冲激响应不变法设计的滤波器的频域特性。
- (4) 熟悉巴特沃斯滤波器、切比雪夫滤波器和椭圆滤波器的频率特性。

2. 实验原理

设计 IIR 数字滤波器一般采用间接法（冲激响应不变法和双线性变换法），应用最广泛的是双线性变换法。

(1) 数字滤波器设计方法如下：

- ① 将给定技术指标转换为模拟滤波器的性能指标。
- ② 求出满足性能指标的相应模拟滤波器的性能阶数和截止频率。

利用 MATLAB 中 buttord、cheblord、cheb2ord、ellipord 等函数, 调用格式为

$[N, \Omega_c] = \text{buttord}(\Omega_p, \Omega_s, \alpha_p, \alpha_s, 's')$

其中, Ω_p 为通带边界频率, 单位为 rad/s; Ω_s 为阻带边界频率, 单位为 rad/s; α_p 为带通波动, 单位为 dB; α_s 为阻带衰减, 单位为 dB; s 表示模拟滤波器; 函数返回值 N 为模拟滤波器的最小阶数; Ω_c 为模拟滤波器的截止频率 (-3dB 频率), 单位为 rad/s。buttord、cheblord、cheb2ord、ellipord 等函数适用低通、高通、带通、带阻滤波器。

③ 设计模拟滤波器。

MATLAB 信号处理工具箱提供了模拟滤波器设计的完全工具函数: butter、cheby1、cheby2、ellip、besself。用户只需一次调用就可完成低通、高通、带通、带阻滤波器设计。调用格式: $[b,a] = \text{butter}(N, \Omega_c, \text{'ftype'}, 's')$, 其中, ftype 为滤波器类型:

high 表示高通滤波器, 截止频率为 Ω_c ;

stop 表示带阻滤波器, $\Omega_c = [\Omega_1 \ \Omega_2]$ ($\Omega_1 < \Omega_2$);

ftype 默认时表示低通或带通滤波器。

本实验的数字滤波器的 MATLAB 实现是指调用 MATLAB 信号处理工具箱函数 filter 对给定的输入信号 $x(n)$ 进行滤波, 得到滤波后的输出信号 $y(n)$ 。

(2) 冲激响应不变法设计 IIR 数字滤波器的步骤如下:

① 假设模拟滤波器的传递函数 $H_a(s)$ 具有一阶极点, 且分母的阶数高于分子的阶数, 将 $H_a(s)$ 展开成部分分式并对 $H_a(s)$ 求反拉普拉斯变换。

② 使用冲激响应不变法求数字滤波器的冲激响应 $h(n)$ 。

③ 求 $h(n)$ 的 Z 变换。

(3) 冲激响应不变法主要用于设计某些要求在时域上能模仿模拟滤波器功能的数字滤波器。主要特点是:

① 频率变换坐标是线性的;

② 具有频谱的周期延拓效应, 只能用于限带的频响特性, 即低通和带通数字滤波器。

(4) 双线性变换法是基于对微分方程的积分, 利用对积分的数值逼近得到的, 所谓双线性, 是指变换公式中 s 与 z 的关系无论是分子部分还是分母部分都是线性的。主要特点是:

① 消除了冲激响应不变法所固有的频率混叠现象;

② 缺点是模拟频率 Ω 和数字频率 ω 之间是非线性关系。

3. 实验内容及步骤

(1) 采用冲激响应不变法设计一个低通切比雪夫 I 型数字滤波器, 设取样频率为 1kHz, 在通带上限临界频率是 400Hz 处衰减不大于 0.3dB, 在阻带临界频率 500Hz 处衰减不小于 60dB。

要求: 绘制幅频响应曲线。

(2) 采用双线性变换法设计一个高通切比雪夫 II 型数字滤波器, 其通带上限临界频率为 1500Hz, 阻带临界频率为 1000 Hz, 抽样频率为 2000Hz, 在通带内最大衰减为 0.3dB, 阻带内的最小衰减为 20dB (此练习涉及的切比雪夫 II 型数字滤波器为提高部分)。

要求: 绘制幅频响应曲线。

(3) 首先设计一个模拟巴特沃斯低通滤波器, 取样频率为 10kHz, 在通带截止频率 1kHz 处衰减不大于 1dB, 在阻带截止频率 1.5kHz 处衰减不小于 15dB。采用双线性变换法设计一个同参数数字巴特沃斯低通滤波器, 通带幅度归一化, 使其在 $\omega=0$ 处幅度为 1。

要求: 绘制模拟滤波器及数字滤波器的幅频特性曲线, 并进行对比。

4. 实验报告及要求

- (1) 简述实验原理。
- (2) 打印程序清单。
- (3) 绘制相应幅频响应曲线。

5. 实验参考程序

(1) 内容 1 参考程序

```
%数字滤波器频率特征转换成模拟滤波器的频率特征
Wp=2*pi*400;
Ws=2*pi*600;
Rp=0.3;
Rs=60;
Fs=1000;
%选择滤波器的最小阶数
[N,Wn]=cheblord(Wp,Ws,Rp,Rs,'s');
%创建低通切比雪夫滤波器
[Z,P,K]=cheblap(N,Rp);
[A,B,C,D]=zp2ss(Z,P,K);
[At,Bt,Ct,Dt]=lp2lp(A,B,C,D,Wn);
[num1,den1]=ss2tf(At,Bt,Ct,Dt);
%冲激响应不变法把模拟滤波器转为数字滤波器
[num2,den2]=impinvar(num1,den1,Fs);
%绘制幅频响应图
[H,W]=freqz(num2,den2);
plot(W*Fs/2/pi,abs(H));grid;
xlabel('Hz');ylabel('幅值');
```

(2) 内容 2 参考程序

```
%数字滤波器的频率特征转换为模拟滤波器的频率特征
Wp=2*pi*1400;Wp1=2*pi*Wp;
Ws=2*pi*1000;Ws1=2*pi*Ws;
Rp=0.3;
Rs=15;
fs=20000;
%选择滤波器的最小阶数
[N,Wn]=cheb2ord(Wp1,Ws1,Rp,Rs,'s');
%创建低通巴特沃斯滤波器
[Z,P,K]=cheb2ap(N,Rs);
[A,B,C,D]=zp2ss(Z,P,K);
%低通到高通的转变
[At1,Bt1,Ct1,Dt1]=lp2hp(A,B,C,D,Wn);
%冲激响应不变法把模拟滤波器转为数字滤波器
[At2,Bt2,Ct2,Dt2]=bilinear(At1,Bt1,Ct1,Dt1,fs);
%绘制幅频响应图
[num,den]=ss2tf(At2,Bt2,Ct2,Dt2);
[H,W]=freqz(num,den);
plot(W*fs/2/pi,abs(H));
grid;
xlabel('Hz');ylabel('幅值');
```

(3) 内容 3 参考程序

```
%数字滤波器指标
wp=0.2*pi;ws=0.3*pi;Rp=1;As=15;
%转换成模拟域指标
T=1;Fs=1/T;
omegap=(2/T)*tan(wp/2);
```

```

omegas=(2/T)*tan(ws/2);
ep=sqrt(10^(Rp/10)-1);
Ripple=sqrt(1/(1+ep*ep));
Attn=1/(10^(As/20));
n=ceil((log10((10^(Rp/10)-1)/(10^(As/10)-1)))/(2*log10(omegap/omegas)));
omegac=omegap/((10^(Rp/10)-1)^(1/(2*n)));
[B,A]=butter(n,omegac,'s');
W=(0:500)*pi/500;
[H]=freqs(B,A,W);
mag=abs(H);
pha=angle(H);
db=20*log10((mag+eps)/max(mag));
%双线性变换法数字滤波器
[b,a]=bilinear(B,A,T);
[h,w]=freqz(b,a,1000,'whole');
h=(h(1:501))';
w=(w(1:501))';
m=abs(h);
p=angle(h);
db=20*log10((m+eps)/max(m));
%绘制频率特性曲线
subplot(2,2,1);plot(w/pi,mag);xlabel('/pi');ylabel('幅度');
title('模拟滤波器幅度响应');grid;axis([0 0.8 0 1]);
subplot(2,2,2);plot(w/pi,pha);xlabel('/pi');ylabel('相位');
title('模拟滤波器相位响应');grid;axis([0 0.8 -4 4]);
subplot(2,2,3);plot(w/pi,m);xlabel('/pi');ylabel('幅度');
title('数字滤波器幅度响应');grid;axis([0 0.8 0 1]);
subplot(2,2,4);plot(w/pi,p);xlabel('/pi');ylabel('相位');
title('数字滤波器相位响应');grid;axis([0 0.8 -4 4]);

```

6. 结果分析讨论

结果如图 8-22~图 8-24 所示。

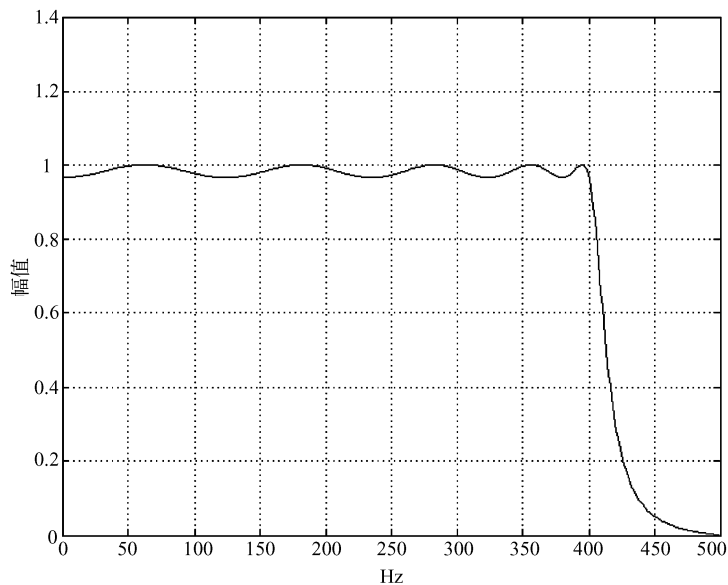


图 8-22 冲激响应不变法设计低通切比雪夫数字滤波器

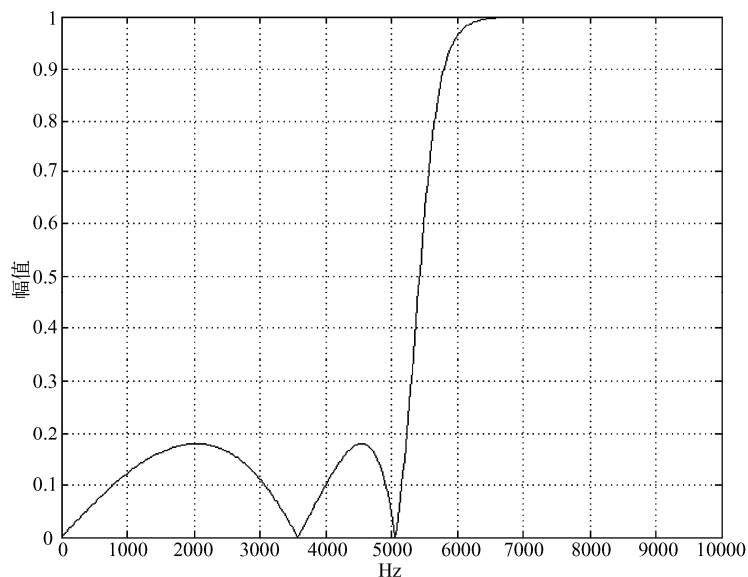


图 8-23 双线性变换法设计高通切比雪夫数字滤波器

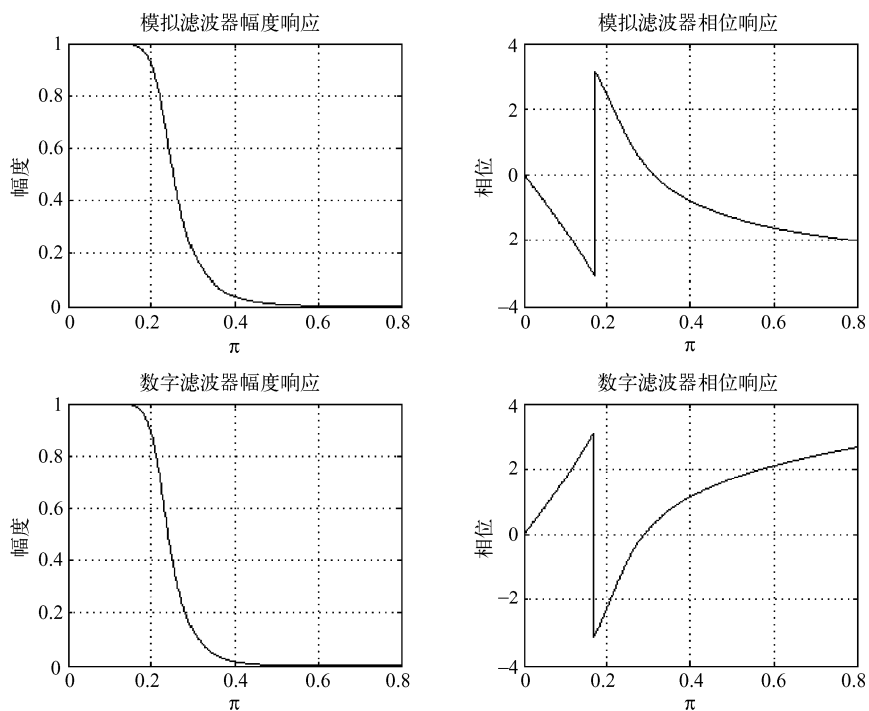


图 8-24 对比模拟滤波器和数字滤波器的幅频特性

实验八 FIR 数字滤波器的设计

1. 实验目的

(1) 掌握用窗函数法设计 FIR 数字滤波器的原理和方法。

- (2) 了解各种不同的窗函数对滤波器性能的影响。
- (3) 掌握 FIR 滤波器的快速卷积实现原理。
- (4) 学会调用 MATLAB 函数, 设计与实现 FIR 滤波器。

2. 实验原理

前面的实验介绍了 IIR 滤波器的设计方法, 特别是双线性变换法由于没有频率混叠, 因而很受欢迎。但是 IIR 滤波器优异的幅度响应一般是以相位的非线性为代价的, 非线性相位会引起频率色散, 相位特性不好控制是它的缺点。FIR 滤波器具有严格的相位特性, 这对于图像信号处理和数据传输是很重要的, 此外, FIR 数字滤波器的极点都位于原点, 所以 FIR 数字滤波器总是稳定的。FIR 滤波器的主要缺点是, 在相同的给定条件下, 滤波器阶数要比 IIR 滤波器的高, 相应的其延迟也要比 IIR 滤波器的大得多。另一个缺点是, 线性相位 FIR 滤波器的延时不一定总是样本间隔的整数倍, 在某些信号处理应用中, 这种非整数延时会带来一些不希望的问题。目前 FIR 滤波器的设计方法主要有三种: 窗函数法、频率取样法和切比雪夫等波纹逼近的最优化设计方法。常用的是窗函数法和频率取样法。本实验中的窗函数法比较简单, 可应用现成的窗函数公式, 在技术指标要求不高的时候是比较灵活方便的。它从时域出发, 用一个窗函数截取理想的 $h_d(n)$ 得到 $h(n)$, 以有限长序列 $h(n)$ 近似理想的 $h_d(n)$; 如果从频域出发, 用理想的 $H_d(e^{j\omega})$ 在单位圆上等间隔取样得到 $H(k)$, 根据 $H(k)$ 得到 $H(z)$, 将逼近理想的 $H_d(z)$, 这就是频率取样法。

几种常见的窗函数如下。

(1) 矩形窗 (Rectangle Window)

调用格式: $w=\text{boxcar}(n)$, 根据长度 n 产生一个矩形窗 w 。

(2) 三角窗 (Triangular Window)

调用格式: $w=\text{triang}(n)$, 根据长度 n 产生一个三角窗 w 。

(3) 汉宁窗 (Hanning Window)

调用格式: $w=\text{hanning}(n)$, 根据长度 n 产生一个汉宁窗 w 。

(4) 海明窗 (Hamming Window)

调用格式: $w=\text{hamming}(n)$, 根据长度 n 产生一个海明窗 w 。

(5) 布莱克曼窗 (Blackman Window)

调用格式: $w=\text{blackman}(n)$, 根据长度 n 产生一个布莱克曼窗 w 。

(6) 恺撒窗 (Kaiser Window)

调用格式: $w=\text{kaiser}(n,\beta)$, 根据长度 n 和影响窗函数旁瓣的 β 参数产生一个恺撒窗 w 。

3. 实验内容及步骤

(1) 分别用矩形窗、三角窗、汉宁窗、海明窗设计低通数字滤波器。信号抽样频率为 1000Hz, 数字滤波器的截止频率为 100Hz, 滤波器的阶数为 80。

(2) 用海明窗设计一个 FIR 低通滤波器, 截止频率 $\omega_c = 0.45\pi$, 窗的长度取 $M=121$, 画出加窗前后冲激响应及滤波器的幅频特性。

4. 实验报告要求

- (1) 附程序清单、打印实验内容要求, 绘制相应的曲线。
- (2) 分析总结实验结果。

5. 实验参考程序

(1) 内容 1 参考程序

```
clear all;close all;  
passrad=0.2*pi;  
w1=boxcar(81);
```

```

w2=triang(81);
w3=hanning(81);
w4=hamming(81);
n=1:1:81;
hd=sin(passrad*(n-41))./(pi*(n-41));
hd(41)=passrad/pi;
h1=hd.*rot90(w1);
h2=hd.*rot90(w2);
h3=hd.*rot90(w3);
h4=hd.*rot90(w4);
[MAG1,RAD]=freqz(h1);
[MAG2,RAD]=freqz(h2);
[MAG3,RAD]=freqz(h3);
[MAG4,RAD]=freqz(h4);
subplot(2,2,1);plot(RAD,20*log10(abs(MAG1)));title('矩形窗');grid on;
subplot(2,2,2);plot(RAD,20*log10(abs(MAG2)));title('三角窗');grid on;
subplot(2,2,3);plot(RAD,20*log10(abs(MAG3)));title('汉宁窗');grid on;
subplot(2,2,4);plot(RAD,20*log10(abs(MAG4)));title('海明窗');grid on;

```

(2) 内容 2 参考程序

```

M=121;
n=[0:1:M-1];
wc=0.45*pi;
hd=ideal_lp(wc,M);
w_rec=(boxcar(M))';
w_ham=(hamming(M))';
h_rec=hd.*w_rec;
h_ham=hd.*w_ham;
[db1,mag1,pha1,grd1,w1]=freqz_m(h_rec,[1]);
[db2,mag2,pha2,grd2,w2]=freqz_m(h_ham,[1]);
subplot(2,2,1);stem(n,hd,'k');grid
title('加矩形窗前脉冲响应')
axis([0,M-1,-0.2,0.5]);ylabel('hd(n)');
subplot(2,2,2);plot(w1/pi,db1,'k');grid
title('加矩形窗后幅频特性')
axis([0,1,-100,10]);ylabel('幅度');
subplot(2,2,3);stem(n,hd,'k');grid
title('加海明窗前脉冲响应')
axis([0,M-1,-0.2,0.5]);ylabel('h(n)');
subplot(2,2,4);plot(w2/pi,db2,'k');grid
title('加海明窗后幅频特性')
axis([0,1,-100,10]);ylabel('幅度');

```

内容 2 涉及的功能函数 freqz_m

```

function[db,mag,pha,grd,w]=freqz_m(b,a);
[H,w]=freqz(b,a,1000,'whole');
H=(H(1:1:501))';w=(w(1:1:501))';
mag=abs(H);
db=20*log10((mag+eps)/max(mag));
pha=angle(H);
grd=grpdelay(b,a,w);

```

内容 2 涉及的功能函数 ideal_lp

```

function hd=ideal_lp(wc,M)
alpha=(M-1)/2;
n=[0:1:(M-1)];
m=n-alpha+eps;
hd=sin(wc*m)./(pi*m);

```

6. 结果分析讨论

结果如图 8-25 和图 8-26 所示。

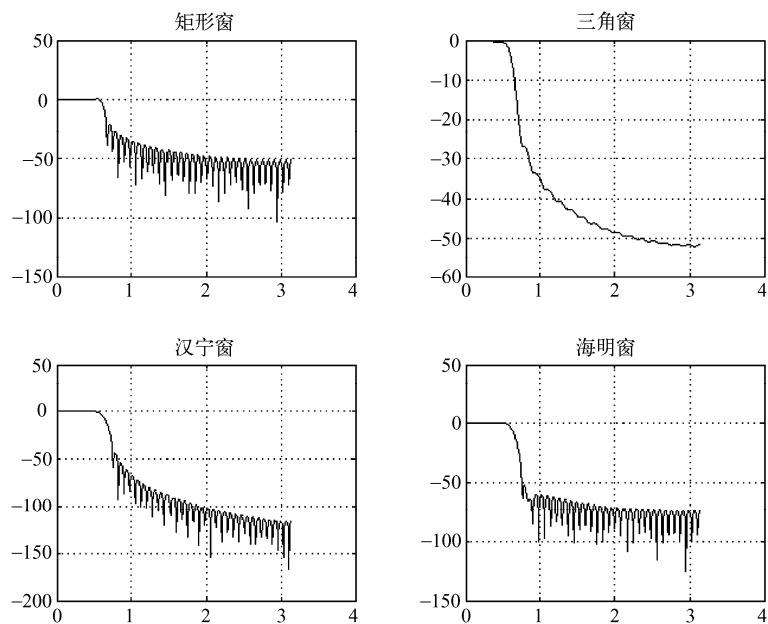


图 8-25 多种窗函数设计低通滤波器

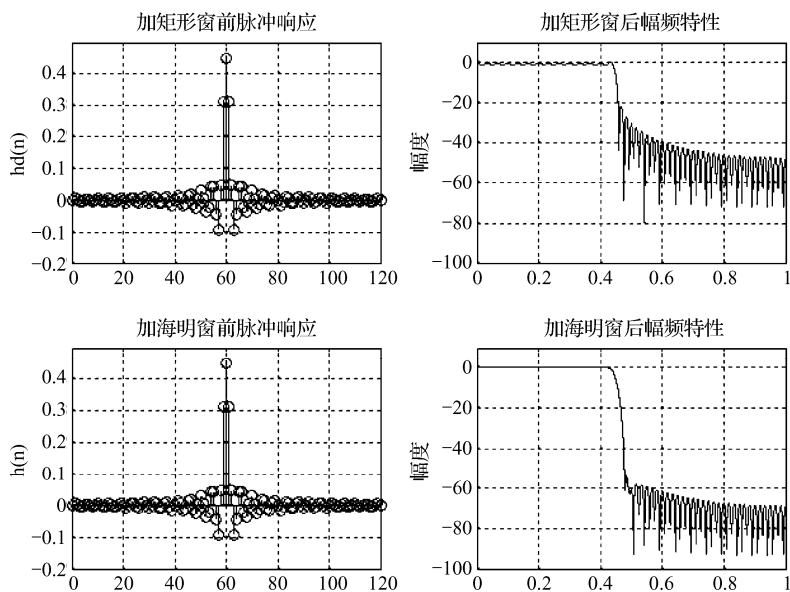


图 8-26 加窗前后的冲激响应及幅频特性

附录 A 巴特沃斯低通滤波器系统函数分母多项式
系数和特征方程的根（极点）

表 A-1 巴特沃斯低通滤波器系统函数分母多项式 $s^N+a_{N-1}s^{N-1}+\cdots+a_2s^2+a_1s+1$ ($a_0=a_N=1$) 的系数

N	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
1	1								
2	1.414 213 6								
3	2.000 000 0	2.000 000 0							
4	2.613 125 9	3.414 213 6	2.613 125 9						
5	3.236 068 0	5.236 068 0	5.236 068 0	3.236 068 0					
6	3.863 703 3	7.464 101 6	9.141 620 2	7.464 101 6	3.863 703 3				
7	4.493 959 2	10.097 834 7	14.591 793 9	14.591 793 9	10.097 834 7	4.493 959 2			
8	5.125 830 9	13.137 071 2	21.846 151 0	25.688 355 9	21.846 151 0	13.137 071 2	5.125 830 9		
9	5.758 770 5	16.581 718 7	31.163 437 5	41.986 385 7	41.986 385 7	31.163 437 5	16.581 718 7	5.758 770 5	
10	6.392 453 2	20.431 729 1	42.802 061 1	64.882 396 3	74.233 429 2	64.882 396 3	42.802 061 1	20.431 729 1	6.392 453 2

表 A-2 巴特沃斯低通滤波器系统函数分母多项式构成的特征方程的根 s_k （极点）

$N=1$	$N=2$	$N=3$	$N=4$	$N=5$	$N=6$	$N=7$	$N=8$	$N=9$	$N=10$
-1.000 000 0	-0.707 106 8 $\pm j0.707 106 8$	-1.000 000 0 -0.500 000 0 $\pm j0.866 025 4$	-0.382 683 4 $\pm j0.923 879 5$ -0.923 879 5 $\pm j0.382 683 4$	-1.000 000 0 -0.309 017 0 $\pm j0.951 056 5$ -0.809 017 0 $\pm j0.587 785 2$	-0.258 819 0 $\pm j0.965 925 8$ -0.707 106 8 $\pm j0.071 068$ -0.965 925 8 $\pm j0.258 819 0$	-1.000 000 0 -0.222 522 09 $\pm j0.974 927 9$ -0.623 489 8 $\pm j0.781 831 5$ -0.900 968 9 $\pm j0.433 883 7$	-0.195 090 3 $\pm j0.980 785 3$ -0.555 570 2 $\pm j0.831 469 6$ -0.831 469 6 $\pm j0.555 570 2$ -0.980 785 $\pm j0.195 090 3$	-1.000 000 0 -0.173 648 2 $\pm j0.984 807 8$ -0.500 000 00 $\pm j0.866 025 4$ -0.766 044 4 $\pm j0.642 787 6$ -0.939 692 6 $\pm j0.342 020 1$	-0.156 434 5 $\pm j0.987 688 3$ -0.453 990 5 $\pm j0.891 006 5$ -0.707 106 8 $\pm j0.707 106 8$ -0.891 006 5 $\pm j0.453 990 5$ -0.987 688 3 $\pm j0.156 434 5$

附录 B 切比雪夫低通滤波器设计

巴特沃斯滤波器的频率特性在相位特性上优于切比雪夫滤波器和椭圆函数滤波器，在幅度滤波器效果上不如同阶的切比雪夫滤波器和椭圆函数滤波器，表现在通带与阻带都随频率增大而单调衰减，如果在通带边界上满足指标，则在通带内一定会有富裕量，即超过指标的要求，从经济角度看并不理想，比较理想的办法是将指标的精度要求要么均匀地分布在通带内，要么均匀地分布在阻带内，或同时均匀地分布在通带与阻带内，这样可以在同样的指标下设计出阶数较低的滤波器。这种精度的均匀分布特性分别与切比雪夫和椭圆函数滤波器的幅度特性相一致。切比雪夫滤波器分为 I 型和 II 型，I 型就具有在通带中等波纹、在阻带中单调的幅度特性。II 型与 I 型的幅度特性正相反，即在通带内单调、在阻带中等波纹。椭圆函数滤波器的幅度特性在通带、阻带均是等波纹的，从幅度滤波角度看，椭圆函数滤波器在同阶条件下衰减最强，切比雪夫滤波器次之，三者中最差的就是巴特沃斯滤波器。但是从相位特性上看，幅度衰减越陡峭，相位特性越差，因此相位特性的排序正好相反。究竟选择哪一类的滤波器，取决于具体应用的指标要求。

图 B-1 和图 B-2 所示为当 N 为奇数与偶数时的切比雪夫 I 型和 II 型滤波器的幅度特性。

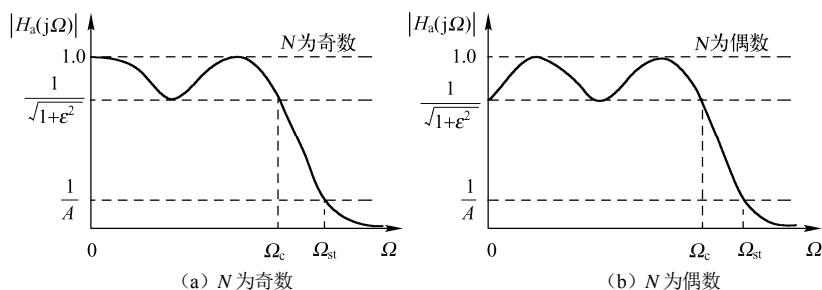


图 B-1 I 型切比雪夫滤波器幅度平方函数特性

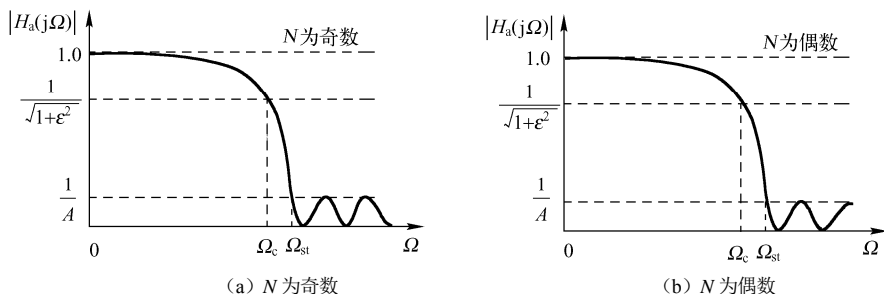


图 B-2 II 型切比雪夫滤波器幅度平方函数特性

以切比雪夫 I 型滤波器为例来讨论这种逼近。切比雪夫 I 型滤波器的幅度平方函数为

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)} \quad (\text{B-1})$$

式中, ε 为小于 1 的正数, 它是表示通波动度的程度参数, ε 值越大, 波动越大; N 为正整数, 表示滤波器的阶次, 即反映滤波器的复杂程度; Ω/Ω_c 表示 Ω 对 Ω_c 频率的归一化处理, Ω_c 称为截止频率, 但不一定为 3dB 频率; $T_N(x)$ 是切比雪夫多项式, 具体为

$$T_N(x) = \begin{cases} \cos(N \arccos x) & |x| \leq 1 \\ \cosh(N \operatorname{arccch} x) & |x| > 1 \end{cases} \quad (\text{B-2})$$

式 (B-2) 可展开成关于 x 的多项式, 如表 B-1 所示。观察表 B-1 可知, N 阶切比雪夫多项式首项的 x 幂次与其系数的关系为 $2^{N-1}x^N$; $N=1$, $T_1(x)=x$; $N=2$, $T_2(x)=2x^2-1$, ... 据此可以得出 N ($N \geq 1$) 阶切比雪夫多项式的递推公式为

$$T_{N+1}(x) = 2xT_N(x) - T_{N-1}(x) \quad (\text{B-3})$$

下面以表格形式给出 $N=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ 时的切比雪夫多项式 ($N=0$, $T_0(x)=1$)。

图 B-3 所示为 $N=0, 1, 2, 3, 4, 5$ 时的切比雪夫多项式特性曲线。

表 B-1 切比雪夫多项式

N	$T_N(x)$
0	1
1	x
2	$2x^2 - 1$
3	$4x^3 - 3x$
4	$8x^4 - 8x^2 + 1$
5	$16x^5 - 20x^3 + 5x$
6	$32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$

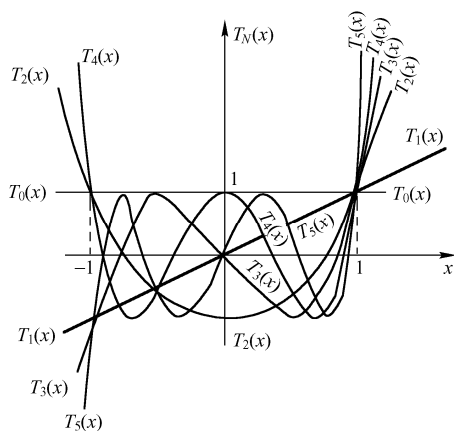


图 B-3 $T_N(x)$ 的特性曲线

由图 B-3 可知, 切比雪夫多项式的零点在 $|x| \leq 1$ 区间内, 且当 $|x| \leq 1$ 时, $|T_N(x)| \leq 1$, $T_N(x)$ 是余弦函数, 多项式 $T_N(x)$ 在 $|x| \leq 1$ 内具有等波纹幅度特性。当 $|x| > 1$ 时, $T_N(x)$ 是双曲余弦函数, 随 x 的增大而单调增大, 即 $\varepsilon^2 T_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right) \gg 1$, $|H_a(j\Omega)|$ 迅速单调地趋于零。

切比雪夫多滤波器幅度响应 $|H_a(j\Omega)|$ 的特点如下。

(1) 当 $\Omega = 0$ 时

$$N \text{ 为偶数, } H_a(j0) = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}};$$

$$N \text{ 为奇数, } H_a(j0) = 1。$$

(2) 当 $\Omega = \Omega_c$ 时

$$H_a(j\Omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$$

Ω_c 定义为切比雪夫滤波器的通带截止频率。这个截止频率并不一定与幅度函数衰减 3dB 对应, 可以是其他分贝数, 如 2dB 等, 对于巴特沃斯滤波器, 则对应的是幅度函数衰减 3dB。

(3) 在通带范围内, 通带内模拟频率取值为 $\Omega < \Omega_c$, 即 $\Omega/\Omega_c < 1$, $|H_a(j\Omega)|$ 在 $1 \sim \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$ 之

间等波纹波动。

(4) 在通带范围外, 通带外模拟频率取值为 $\Omega > \Omega_c$, 这时随着 Ω 的增大, $1 + \varepsilon^2 T_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right) \gg 1$,

使 $|H_a(j\Omega)|^2$ 迅速单调地趋于零。

切比雪夫低通滤波器的设计, 指标与巴特沃斯低通滤波器的类似, 一般给出两个截止频率: 通带截止频率, 阻带截止频率; 两个衰减: 通带最大衰减 δ_1 , 阻带最小衰减 δ_2 。根据给定指标求切比雪夫低通滤波器的系统函数 $H_a(s)$, 具体的设计步骤如下。

(1) 求 ε

ε 参数与通带波动有关, 通带波动 δ_1 表示为

$$\delta_1 = 20 \lg \frac{|H_a(j\Omega)|_{\max}}{|H_a(j\Omega)|_{\min}} (\text{dB})$$

式中, $|H_a(j\Omega)|_{\max} = 1$ 为通带幅度响应的最大值; $|H_a(j\Omega)|_{\min} = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}$ 为通带幅度响应的最小值, 因此有

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 20 \lg \frac{|H_a(j\Omega)|_{\max}}{|H_a(j\Omega)|_{\min}} = -20 \lg |H_a(j\Omega)|_{\min} = 10 \lg_{10}(1 + \varepsilon^2) \\ \frac{\delta_1}{10} &= \lg_{10}(1 + \varepsilon^2) \Rightarrow 10^{\frac{\delta_1}{10}} - 1 = \varepsilon^2 \end{aligned}$$

可见, 由通带波动 δ_1 值可以求出 ε^2 。

(2) 求切比雪夫低通滤波器的阶数 N

N 等于通带内最大值的个数和最小值的个数之和 (最大值和最小值的总个数)。当 N 为奇数时, $\Omega = 0$ 处 $H_a(j\Omega) = 1$ (最大值); 当 N 为偶数时, $\Omega = 0$ 处 $H_a(j\Omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}$ (最小值) (见图 B-1 所示 I 型切比雪夫滤波器幅度平方函数特性)。

N 的数值可由阻带衰减求出。当阻带截止频率为 Ω_{st} (阻带起点频率) 时, 则阻带幅度平方满足:

$$|H_a(j\Omega_{st})|^2 \leq \frac{1}{A^2}$$

式中, A 为常数 (如图 B-1 和图 B-2 所示), 阻带最小衰减 δ_2 可表示为

$$\delta_2 = 10 \lg \frac{1}{1/A^2} = 20 \lg \frac{1}{1/A} = 20 \lg A$$

可解出 A 为

$$A = 10^{\delta_2/20}$$

当 $\Omega = \Omega_{st}$ 时, 下式成立。

$$|H_a(j\Omega_{st})|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)} \leq \frac{1}{A^2}$$

由此可以推导出

$$1 + \varepsilon^2 T_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right) \geq A^2 \Rightarrow T_N\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right) \geq \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{A^2 - 1} \quad (\text{B-4})$$

考虑在阻带, 即 $\frac{\Omega_{st}}{\Omega_c} > 1$, 下式成立

$$T_N\left(\frac{\Omega_{\text{st}}}{\Omega_c}\right) = \text{ch}\left[N \text{arcch}\left[\frac{\Omega_{\text{st}}}{\Omega_c}\right]\right]$$

考虑式 (B-4), 则有

$$T_N\left(\frac{\Omega_{\text{st}}}{\Omega_c}\right) = \text{ch}\left[N \text{arcch}\left[\frac{\Omega_{\text{st}}}{\Omega_c}\right]\right] \geq \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{A^2 - 1} \quad (\text{B-5})$$

由此解得

$$N \geq \frac{\text{arcch}\left[\frac{1}{\varepsilon} \sqrt{A^2 - 1}\right]}{\text{arcch}\left(\frac{\Omega_{\text{st}}}{\Omega_c}\right)} = \frac{\text{arcch}\left[\frac{1}{\varepsilon} \sqrt{10^{0.1\delta_2} - 1}\right]}{\text{arcch}\left(\frac{\Omega_{\text{st}}}{\Omega_c}\right)}$$

N 为滤波器的阶数, N 值的选取原则是取大于计算值的整数。如果要求阻带边界频率上衰减越大 (A 越大), 也就是过渡带内幅度特性越陡峭, 则所需的阶数 N 越高。

考虑式 (B-5) 取等号, Ω_{st} 可由 Ω_c 、 ε 和 δ_2 表示, 如下

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{st}} &= \Omega_c \text{ch}\left\{\frac{1}{N} \text{arcch}\left[\frac{1}{\varepsilon} \sqrt{A^2 - 1}\right]\right\} \\ &= \Omega_c \text{ch}\left\{\frac{1}{N} \text{arcch}\left[\frac{1}{\varepsilon} \sqrt{10^{0.1\delta_2} - 1}\right]\right\} \end{aligned}$$

Ω_c 是切比雪夫滤波器的通带宽度, 但不是 3dB 带宽, 可以求出 3dB 带宽为 (这时 $A = \sqrt{2}$)

$$\Omega_{3\text{dB}} = \Omega_c \text{ch}\left[\frac{1}{N} \text{ch}^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right] \quad (\text{B-6})$$

需要强调, 仅当 $\Omega_c < \Omega_{\text{st}}$ 时, 才可用式 (B-6) 求解 $\Omega_{3\text{dB}}$ 。

(3) 求滤波器系统函数

N 、 Ω_c 和 ε 给定后, 滤波器的系统函数 $H_a(s)$ 就可通过查阅有关模拟滤波器的设计手册获得。还可以通过求极点的公式获得, 切比雪夫 I 型滤波器幅度平方函数的极点可由 $1 + \varepsilon^2 T_N^2\left(\frac{s}{j\Omega_c}\right) = 0$ 解出, 通过极点求出 $H_a(s)$ 。取出 s 左半平面的极点分给 $H_a(s)$, 其复极点为

$$\begin{aligned} s_k &= \sigma_k + j\Omega_k \\ &= \mp \Omega_c \sin\left(\frac{2k-1}{2N}\pi\right) \cdot \text{sh}\left(\frac{1}{N} \text{arcsh}\frac{1}{\varepsilon}\right) + \\ &\quad j\Omega_c \cos\left(\frac{2k-1}{2N}\pi\right) \cdot \text{ch}\left(\frac{1}{N} \text{arcsh}\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad k = 1, 2, \dots, 2N \end{aligned} \quad (\text{B-7})$$

其中

$$\sigma_k = \mp \Omega_c a \sin\left[\frac{\pi}{2N}(2k-1)\right] \quad k = 1, 2, \dots, 2N \quad (\text{B-8})$$

$$\Omega_k = \Omega_c b \cos\left(\frac{\pi}{2N}(2k-1)\right) \quad k = 1, 2, \dots, 2N \quad (\text{B-9})$$

$$a = \text{sh}\left[\frac{1}{N} \text{arcsh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right] \quad (\text{B-10})$$

$$b = \text{ch}\left[\frac{1}{N} \text{arcsh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right] \quad (\text{B-11})$$

因此, 式 (B-8)、式 (B-9) 的平方之和为

$$\frac{\sigma_k^2}{(\Omega_c a)^2} + \frac{\Omega_k^2}{(\Omega_c b)^2} = 1$$

这是一个椭圆方程。由于双曲余弦 $\text{ch}(\cdot)$ 大于双曲正弦 $\text{sh}(\cdot)$, 故模拟切比雪夫滤波器的极点位于 s 平面长轴为大圆直径 (在虚轴上)、短轴为小圆直径 (在实轴上) 的椭圆上。图 B-4 所示为 $N=4$ 阶时的极点分布位置图。

由 $1 + \varepsilon^2 T_N^2\left(\frac{s}{j\Omega_c}\right) = 0$ 确定的极点为 $2N$ 个, 即 $H_a(s)H_a(-s)$ 的极点分布在整个 s 平面, 取 s 平面左半平面的极点分给 $H_a(s)$, 即取式 (B-7) 的左半平面的极点 s_k , $s_k = \sigma_k + j\Omega_k$, σ_k 和 Ω_k 分别为

$$\sigma_k = -\Omega_c a \sin\left[\frac{\pi}{2N}(2k-1)\right] \quad k=1, 2, \dots, N \quad (\text{B-12})$$

$$\Omega_k = \Omega_c b \cos\left[\frac{\pi}{2N}(2k-1)\right] \quad k=1, 2, \dots, N \quad (\text{B-13})$$

可以推导出 a 、 b 有下列形式

$$a = \frac{1}{2} (\alpha^{\frac{1}{N}} - \alpha^{-\frac{1}{N}}) \quad (\text{B-14})$$

$$b = \frac{1}{2} (\alpha^{\frac{1}{N}} + \alpha^{-\frac{1}{N}}) \quad (\text{B-15})$$

其中

$$\alpha = \frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1} \quad (\text{B-16})$$

求出幅度平方函数的极点后, $H_a(s)$ 的极点就是 s 平面左半平面的极点 s_i , 从而得到切比雪夫滤波器的系统函数为

$$H_a(s) = \frac{K}{\prod_{i=1}^N (s - s_i)} \quad (\text{B-17})$$

常数 K 可由 $|H(j\Omega)|$ 和 $H_a(s)$ 的低频或高频特性对比求得。

图 B-4 所示为确定切比雪夫 I 型滤波器极点在椭圆上的位置的方法, 先求出大圆 (半径为 $b\Omega_c$) 和小圆 (半径为 $a\Omega_c$)

上按等间隔角 $\frac{\pi}{N}$ 均分的各个点, 这些点是呈虚轴对称的, 且一定都不落在虚轴上。当 N 为奇数时, 有落在实轴上的点, 当 N 为偶数时, 实轴上则没有点。幅度平方函数的极点 (在椭圆上) 位置是这样确定的: 其垂直坐标由落在大圆上的各等间隔点规定, 其水平坐标由落在小圆上的各等间隔点规定。

切比雪夫 II 型滤波器的幅度特性在通带内具有单调特性, 在阻带内具有等波纹特性, 其模平方函数为

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon_2^2 \left[\frac{T_N(\Omega_{st})}{T_N(\Omega_{st}/\Omega)} \right]^2}$$

式中, Ω_{st} 为阻带衰减达到规定值的起始点频率。

椭圆函数滤波器是幅度衰减最强的滤波器, 其通带、阻带均具有等波动的幅度特性, 椭圆函数滤波器的相位特性是最差的。对椭圆函数滤波器和切比雪夫 II 型滤波器不再做详细讨论。

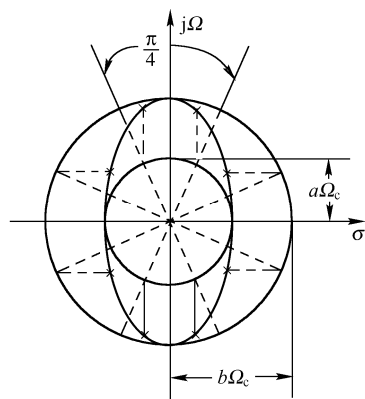


图 B-4 $N=4$ 阶模拟切比雪夫 I 型滤波器极点分布位置图

附录 C 等比级数前 N 项和公式及其应用举例

1. 求等比级数前 N 项和公式

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}, \text{ 当 } |a| < 1 \text{ 时}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} a^n = \sum_{n=0}^{\infty} a^n - 1 = \frac{1}{1-a} - 1 = \frac{1-1+a}{1-a} = \frac{a}{1-a}, \text{ 当 } |a| < 1 \text{ 时}$$

$$(3) \sum_{n=k}^{\infty} a^n = \frac{a^k}{1-a}, \text{ 当 } |a| < 1 \text{ 时}$$

$$(4) \sum_{n=0}^{N-1} a^n = \begin{cases} \frac{1-a^N}{1-a} & a \neq 1 \\ N & a = 1 \end{cases}$$

$$(5) \sum_{n=1}^N a^n = \sum_{n=0}^N a^n - 1 = \frac{1-a^{N+1}-1+a}{1-a} = \frac{a(1-a^N)}{1-a}$$

$$(6) \sum_{n=k}^N a^n = a^k + a^{k+1} + a^{k+2} + a^{k+3} + \cdots + a^N \\ = a^k (1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{N-k}) = a^k \sum_{n=0}^{N-k} a^n = \frac{a^k (1-a^{N-k+1})}{1-a}$$

2. 应用举例

$$(1) X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (a^1 z^{-1})^n = \frac{1}{1-az^{-1}}, \text{ 当 } |az^{-1}| < 1 \text{ 时}$$

$$(2) X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} -b^n z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} -b^{-n} z^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (b^{-1}z)^n = 1 - \frac{1}{1-b^{-1}z} = -\frac{b^{-1}z}{1-b^{-1}z}, \text{ 当 } |b^{-1}z| < 1 \text{ 时}$$

$$(3) \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n} = \frac{1}{N} \frac{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)N}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)}} = 0 \text{ (分子为零, 分母不为零, 当 } k \neq r \text{ 时)}$$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n} = \frac{1}{N} \frac{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)N}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)}} = 1 \text{ (上式 } \frac{0}{0}, \text{ 洛必达法则求极限, 当 } k = r \text{ 时)}$$

或当 $k = r$ 时, $e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n} = 1, n=0, 1, 2, \cdots, N-1$, 共有 N 个 1, 因此 $\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n} = N/N=1$, 利用求

等比级数前 N 项和公式 (4) 可直接得出上述结果。

附录 D MATLAB 简介

MATLAB (Matrix Laboratory) 是 Math Works 公司于 1982 年推出的一套高性能的数值化计算和可视化软件。它集数值分析、矩阵运算、信号处理和图形显示于一体, 广泛应用于工业、电子、医疗和建筑等众多领域。它是一种面向对象的交互式程序设计语言, 其结构完整又有优良的可移植性, 在矩阵运算、数字信号处理方面有强大的功能。另外, MATLAB 提供了方便的绘图功能, 便于用户直观地输出处理结果。本课程实验要求学生运用 MATLAB 编程完成一些数字信号处理的基本功能, 加深对教学内容的理解。

MATLAB 的应用窗口主要包括: 命令窗口、历史命令窗口、工作空间窗口、当前路径窗口。在数字信号处理中主要使用的是命令窗口 (Command Window) 和 M 文件编辑/调试 (Editor/Debugger) 窗口。

1. MATLAB 的基本运算

MATLAB 的基本运算可在 Command Window 下进行, 输入运算法则后, 按 Enter 键即可显示结果。如需要清屏, 可输入 `clc` 指令, 注意: 命令均使用小写字母, 因为 MATLAB 软件区分大小写。

(1) 矩阵的加、减法, 矩阵的维数必须相同

```
>> A=[1 2;3 4]
A =
     1     2
     3     4
>> B=[5 6;7 8]
B =
     5     6
     7     8
>> C=A+B
C =
     6     8
    10    12
```

(2) 矩阵的转置

```
>> A'
ans =
     1     3
     2     4
```

(3) 矩阵的乘法

```
>> D=A*B
D =
    19    22
    43    50
```

(4) 矩阵的点乘

```
>> E=A.*B
E =
     5    12
    21    32
```

2. MATLAB 的绘图功能

MATLAB 提供了强大的绘图功能,有独立的图形窗口,在执行画图命令时自动新建一个图形窗口。图形是由一系列点(离散的)构成的,因此,调用绘图函数时必须已经生成了一系列的点。

(1) 图形窗口的建立

figure(H): 建立图形窗口函数, H 为操作句柄, H 为整数;

gcf: 得到所建立图形的窗口句柄 H;

get(H): 得到所建立的图形的各项属性的详细情况;

close(H): 关闭句柄为 H 的图形窗口。

(2) 基本绘图函数 plot 与 stem 函数

plot 是绘制连续曲线的基本函数,但在使用此函数之前,需先定义曲线上每一点的 x 及 y 坐标,这两个坐标都是以数组形式出现的。下例可画出一条正弦曲线,在 Command Window 下运行。

```
>>close all; x=linspace(0, 2*pi, 100); % 100 个点的 x 坐标
>>y=sin(x); % 对应的 y 坐标
>>plot(x,y);
```

运行结果如图 D-1 所示。

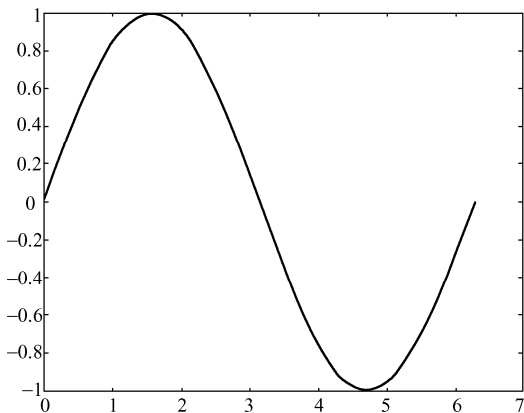


图 D-1 plot 函数绘图

采用 **hold on** 语句也可以实现在同一窗口画多个图。

方法一:

```
>>x=0:pi/100:2*pi;
>>plot(x,sin(x));
>>hold on;
>>plot(x,cos(x)); %以上语句在同一窗口画 sin(t)和 cos(t)的图形
```

方法二:

```
>>x=0:pi/100:2*pi;
>>plot(x, sin(x), x, cos(x));
```

运行结果如图 D-2 所示。

若要改变颜色,在坐标对后面加上相关字串即可:

```
>>plot(x, sin(x), 'c', x, cos(x), 'g');
```

若要同时改变颜色及图线形态 (Line style), 也是在坐标对后面加上相关字串即可:

```
>>plot(x, sin(x), 'co', x, cos(x), 'g*');
```

运行结果如图 D-3 所示。

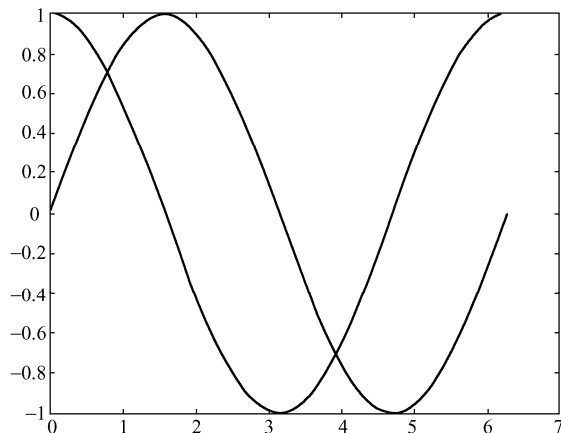


图 D-2 在同一窗口画两图

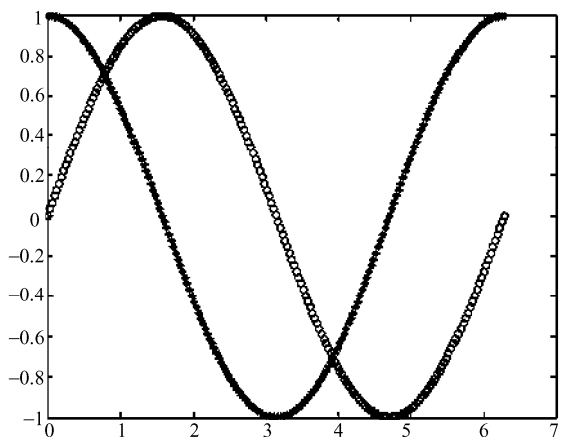


图 D-3 改变曲线颜色及形态

(3) 绘图坐标轴范围 axis 函数

图形完成后，可用 `axis([xmin,xmax,ymin,ymax])` 函数来调整图轴的范围：

```
axis([0, 6, -1.2, 1.2]);
```

(4) 图形注解与处理函数

```
xlabel('Input Value');           % x 轴注解
ylabel('Function Value');        % y 轴注解
title('Two Trigonometric Functions'); % 图形标题
legend('y = sin(x)', 'y = cos(x)'); % 图形注解
grid on; % 显示格线
```

(5) subplot 函数

它可以同时于同一个视窗之中画出多个小图形，分割图形窗口。

`subplot(m,n,k)`。其中 `m` 和 `n` 表示图形窗口将分割成 `m` 行 `n` 列的子窗口，`k` 表示将第 `k` 个子窗口作为当前的操作窗口，如：

```
>> x=0:pi/100:2*pi;
>> figure(1);
>> subplot(2,1,1);
>> plot(x,sin(x));
```

```
>> subplot(2,1,2);
>> plot(x,cos(x));
```

运行结果如图 D-4 所示。

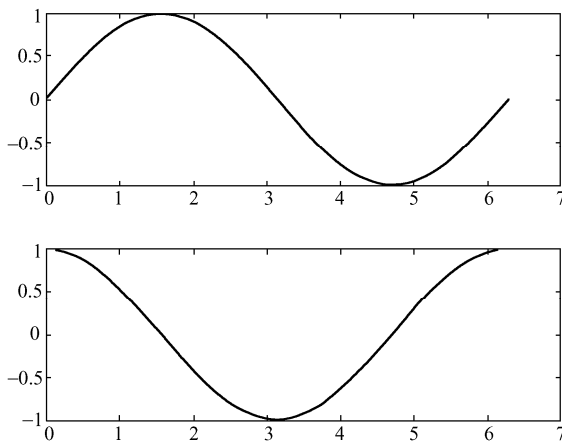


图 D-4 图形分割成两幅图

也可分割为多个图形, 如:

```
subplot(2,2,1); plot(x, sin(x)); subplot(2,2,2); plot(x, cos(x));
subplot(2,2,3); plot(x, sinh(x)); subplot(2,2,4); plot(x, cosh(x));
```

运行结果如图 D-5 所示。

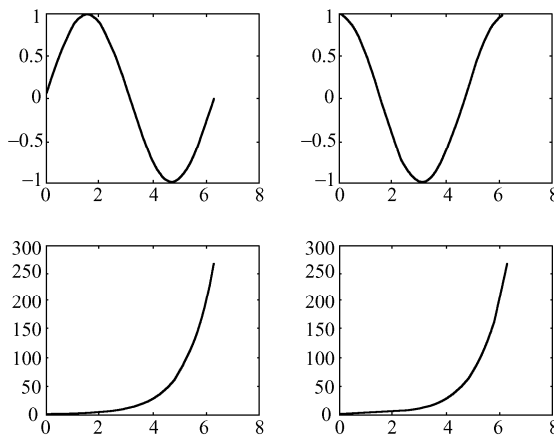


图 D-5 图形分割成 4 幅图

添加图形标题如下:

```
subplot(2,2,1); plot(x, sin(x)); title('sin(x)');
subplot(2,2,2); plot(x, cos(x)); title('cos(x)');
subplot(2,2,3); plot(x, sinh(x)); title('sinh(x)');
subplot(2,2,4); plot(x, cosh(x)); title('cosh(x)');
```

运行结果如图 D-6 所示。

MATLAB 还有其他各种二维绘图函数, 以适合不同的应用。

`stem(y)`和 `stem(x,y)`分别与 `plot(x)`、`plot(x,y)`的绘图规则相同, 只是 `stem` 绘制的是离散序列图, 序列线端为圆圈, 如

```
>>n=0:9;
```

```
>>x=[1,2,3,4,5,5,4,3,2,1]
>>stem(n,x);
```

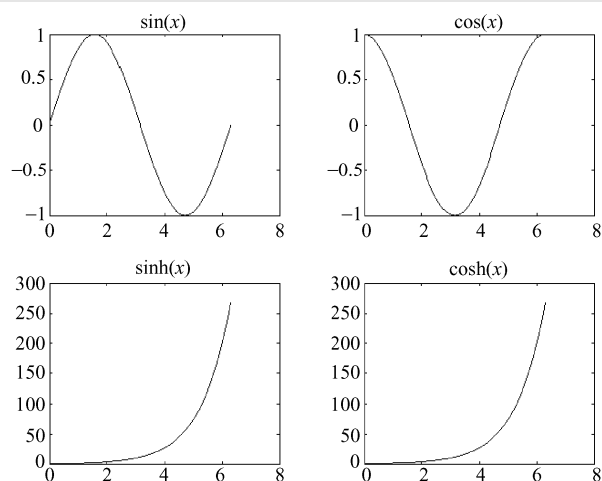


图 D-6 添加图形标题

运行结果如图 D-7 所示。

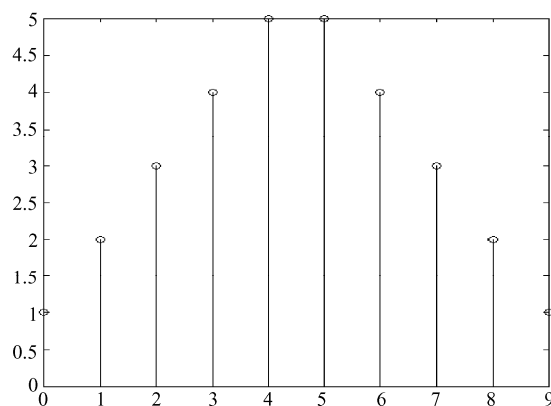


图 D-7 stem 函数绘图

3. M 文件的建立

用鼠标在 MATLAB 命令窗口上单击 File 菜单，选择 New 中的 M 文件，如图 D-8 所示。

M 文件有两个形式：命令文件和函数文件。命令文件类似 DOS 下的批处理文件，包含一连串的 MATLAB 命令。

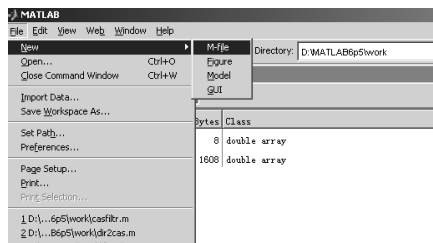


图 D-8 M 文件建立菜单

函数文件 (function file) 的第一句可执行语句是以 `function` 引导的定义语句, 在函数文件中的变量都是局部变量。函数是一个“黑箱”, 把一些数据送进去, 经加工处理, 把结果送出来。从形式上看, 函数文件与命令文件的不同之处是: 命令文件的变量在文件执行完后保留在内存中; 而函数文件内定义的变量仅在函数文件内部起作用, 函数文件执行完后, 这些内部变量将被消除。

MATLAB 函数文件实际包含 5 部分:

- ① 函数定义行;
- ② 函数主体;
- ③ 函数说明;
- ④ 注解;
- ⑤ H1 行。

函数文件就像 MATLAB 提供的函数库一样, 读者可以建立自己的函数库及其说明文件, 也可以为每一个函数编写一个使用说明, 只要遵循 MATLAB 的规定, 就可以很简单地实现这种功能, 这个规定如下。

- ◆ 将自己的函数程序保存在同一个目录下;
- ◆ 第一行执行指令的作用: 指明该文件是函数文件、定义函数名、输入参数和输出参数;
- ◆ 每个函数库的 H1 必须紧跟在定义行之后;
- ◆ 每个函数库的使用说明紧跟在 H1 之后;
- ◆ 在 M 文件前面, 连续几行带 “%” 的注释行有两个作用: 一是随 M 文件全部显示打印时, 直接起解释提示作用; 二是提供 `help` 指令在线查询。

4. MATLAB 中一些基本函数的建立方法

(1) 单位冲激序列 $\delta(n)$

$\delta(n)$ 可用 `zeros` 函数来实现, 即

```
x=zeros(1,N);
x(1)=1;
```

(2) 单位阶跃序列 $u(n)$

MATLAB 中的 `ones` 函数可以实现 N 点单位阶跃序列, 即

```
x=ones(1,N);
```

(3) 正弦序列

```
n=0:N-1;
x=A*sin(2*pi*f*n*Ts);
```

(4) 指数序列

```
n=1:N;
x=a.^n;
```

(5) 复指数序列

```
n=0:N-1;
x=exp(j*w*n);
```

(6) 随机序列

```
rand(1,N);      %产生[0,1]上均匀分布的随机序列
randn(1,N);     %产生均值为0,方差为1的高斯随机序列,即白噪声序列
```

5. 常用 MATLAB 函数

常用 MATLAB 函数如表 D-1 所示。

表 D-1 常用 MATLAB 函数

分 类	序 号	函 数	功 能
滤波器分析与实现	1	abs	求绝对值
	2	angle	求相角
	3	conv	求卷积
	4	filter	直接滤波器实现
	5	filter2	二维数字滤波器
	6	freqs	模拟滤波器频率响应
	7	freqspace	画出频率响应曲线
	8	freqz	数字滤波器频率响应
	9	freqzplot	画出频率响应曲线
	10	impz	数字滤波器的单位冲激响应
	11	zplane	离散系统零、极点图
	12	unwrap	去除相位
	13	fftfilt	重叠相加滤波器实现
	14	filtfilt	零相位滤波
FIR 滤波器设计	15	fir1	基于窗函数的 FIR 滤波器设计
	16	fir2	基于窗函数的任意响应 FIR 滤波器设计
	17	fircls	约束最小二乘法任意响应滤波器设计
	18	fircls1	约束最小二乘法低通和高通滤波器设计
	19	firls	最小二乘法 FIR 滤波器设计
	20	firrcos	上升余弦 FIR 滤波器设计
	21	intfilt	插值 FIR 滤波器设计
	22	kaiserord	基于窗函数的 Kaiser 滤波器阶数选择
	23	remez	Parks McClellan 最适合 FIR 滤波器设计
	24	remezord	ParksMcClellan 滤波器阶数估计
	25	sgolay	Savitzky Golayfir 平滑滤波器设计
IIR 数字滤波器设计	26	butter	巴特沃斯滤波器设计
	27	cheby1	切比雪夫 I 型滤波器设计
	28	cheby2	切比雪夫 II 型滤波器设计
	29	ellip	椭圆型滤波器设计
	30	maxflat	归一化的巴特沃斯低通滤波器设计
IIR 数字滤波器阶数估算	31	buttord	巴特沃斯滤波器阶数选择
	32	cheb1ord	切比雪夫 I 型滤波器阶数选择
	33	cheb2ord	切比雪夫 II 型滤波器阶数选择
	34	ellipord	椭圆型滤波器阶数选择
模拟低通滤波器原型	35	besselap	贝塞尔滤波器原型
	36	buttap	巴特沃斯滤波器原型
	37	cheb1ap heb1ap	切比雪夫 I 型滤波器原型（通带波动）
	38	cheb2ap	切比雪夫 II 型滤波器原型（阻带波动）
	39	ellipap	椭圆滤波器原型
模拟低通滤波器设计	40	besself	贝塞尔模拟滤波器设计

续表

分 类	序 号	函 数	功 能
模拟低通滤波器设计	41	butter	巴特沃斯滤波器设计
	42	cheby1	切比雪夫 I 型滤波器设计
模拟低通滤波器设计	43	cheby2	切比雪夫 II 型滤波器设计
	44	ellip	椭圆滤波器设计
模拟滤波器频带变换	45	Lp2bp	低通向带通模拟滤波器变换
	46	Lp2bs	低通向带阻模拟滤波器变换
	47	Lp2hp	低通向高通模拟滤波器变换
	48	Lp2lp	低通向低通模拟滤波器变换
滤波器离散化	49	bilinear	双线性变换法模拟向数字的转换
	50	impinvar	冲激响应不变法模拟向数字的转换
线性系统变换	51	latc2tf	格形或格形梯形向传递函数转换
	52	polystab	使多项式稳定
	53	polyscale	多项式根乘以倍率
	54	eesiduez	Z 变换部分分式展开
	55	sos2ss	级联二阶环向状态空间转换
	56	sos2tf	级联二阶环向传递函数转换
	57	sos2zp	级联二阶环向零极增益转换
	58	ss2sos	状态空间转换为二阶环节级联
	59	ss2tf	状态空间向专递函数转换
	60	ss2zp	状态空间向零极增益转换
	61	tf2latc	传递函数向格形或格形梯形转换
	62	tf2sos	传递函数向级联二阶环节转换
	63	tf2ss	状态空间向传递函数转换
	64	tf2zp	传递函数向零极增益转换
	65	zp2sos	零极增益向级联二阶环节转换
	66	zp2ss	零极增益向状态空间转换
	67	zp2tf	零极增益向传递函数转换
窗函数	68	bartlett	Bartlett 窗函数
	69	barthannwin	修正巴特利特-汉宁窗
	70	blackman	布莱克曼窗函数
	71	blackmanharris	最小四项 Blackman-Harris 窗函数
	72	bohmanwin	Bohman 窗函数
	73	chebwin	切比雪夫窗函数
	74	gausswin	高斯窗函数
	75	hamming	海明窗函数
	76	hanning	汉宁窗函数
	77	kaiser	恺撒窗函数
	78	nutallwin	Nuttall 最小四项 Blackman-Harris 窗函数
	79	triang	三角窗函数
	80	tukeywin	Tukey 窗函数
	81	window	窗函数引入

参 考 文 献

- [1] 胡广书. 数字信号处理导论. 北京: 清华大学出版社, 2005.
- [2] 王永玉, 孙衢. 数字信号处理及应用. 北京: 北京邮电大学出版社, 2009.
- [3] 周辉, 董飞宏. 数字信号处理基础及 MATLAB 实现. 北京: 北京希望电子出版社, 2006.
- [4] 唐向宏. 数字信号处理. 北京: 高等教育出版社, 2006.
- [5] 周利清, 苏菲. 数字信号处理基础. 北京: 北京邮电大学出版社, 2005.
- [6] 丛玉良, 王宏志. 数字信号处理原理及其 MATLAB 实现. 北京: 电子工业出版社, 2009.
- [7] 高西全, 丁玉美. 数字信号处理. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2008.
- [8] 姚天任, 江太辉. 数字信号处理. 武汉: 华中科技大学出版社, 2007.
- [9] 李莉. 数字信号处理实验教程. 北京: 清华大学出版社, 2011.
- [10] 薛年喜. MATLAB 在数字信号处理中的应用. 北京: 清华大学出版社, 2003.
- [11] Ingle, V. K., Proakis, J. G., 刘树棠, 译. 数字信号处理使用 MATLAB. 西安: 西安交通大学出版社, 2002.
- [12] 程佩青. 数字信号处理教程 (第二版). 北京: 清华大学出版社, 2001.
- [13] 唐向宏, 方志刚, 陆光华, 张建奇, 毕岗. 数字信号处理. 浙江: 浙江大学出版社, 2006.
- [14] 朱冰莲. 数字信号处理. 北京: 电子工业出版社, 2011.
- [15] 桂志国, 楼国红, 陈友兴, 张权, 郝慧艳. 数字信号处理. 北京: 科学出版社, 2010.
- [16] 刘泉, 阙大顺, 郭志强. 数字信号处理原理与实现 (第二版). 北京: 电子工业出版社, 2009.
- [17] 王玉德. 数字信号处理. 北京: 北京大学出版社, 2011.
- [18] 李辉, 思德, 高娜. 数字信号处理及 MATLAB 实现. 北京: 机械工业出版社, 2011.
- [19] 胡广书. 数字信号处理——理论、算法与实现 (第二版). 北京: 清华大学出版社, 2003.
- [20] 刘兴剑, 李力利, 朱冰莲. 数字信号处理. 北京: 电子工业出版社, 2010.
- [21] 郑国强, 付江涛, 彭勃. 数字信号处理——理论与实践. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2009.
- [22] 姚天任. 数字信号处理教程. 北京: 清华大学出版社, 2011.
- [23] 李莉, 王佩, 俞玉莲, 常宁. 数字信号处理原理与实现 (第二版). 北京: 清华大学出版, 2010.
- [24] 张立才, 王民, 高有堂. 数字信号处理——原理、实现及应用. 北京: 北京邮电大学出版社, 2011.
- [25] S poornachandra, B sasikala. Digital Signal Processing (Third Edition 影印). 北京: 科学出版社, 2012.
- [26] Vinay K Ingle, John G Proakis. Digital Signal Processing using MATLAB (Third Edition 影印). 北京: 科学出版社, 2012.
- [27] 王华奎. 数字信号处理及应用 (第二版). 北京: 高等教育出版社, 2009.
- [28] 刘明亮, 郭云. 数字信号处理基础教程. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2011.
- [29] 杨毅明. 数字信号处理. 北京: 机械工业出版社, 2012.
- [30] 朱金秀, 江冰, 吴迪, 胡居荣. 数字信号处理——原理、实验及综合应用. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2011.
- [31] 沈卫康, 宋宇飞, 宋红梅. 数字信号处理. 北京: 清华大学出版社, 2011.
- [32] 赵健, 李勇. 数字信号处理. 北京: 清华大学出版社, 2006.
- [33] 赵春晖, 陈立伟, 马慧珠, 万建. 数字信号处理 (第二版). 北京: 电子工业出版社, 2011.
- [34] 陈戈珩, 付虹, 于德海. 信号与系统实用教程. 北京: 清华大学出版社, 2007.
- [35] 王震宇, 张培珍. 数字信号处理. 北京: 北京大学出版社, 2011.
- [36] 焦瑞丽, 罗倩等. 数字信号处理. 北京: 机械工业出版社, 2011.
- [37] 王超, 安建伟. 数字信号处理. 北京: 国防工业出版社, 2010.
- [38] 刘益成, 孙祥娥. 数字信号处理 (第二版). 北京: 电子工业出版社, 2009.
- [39] 王世一. 数字信号处理 (修订版). 北京: 北京理工大学出版社, 1997.

- [40] 陈后金, 薛健, 胡健. 数字信号处理（第2版）. 北京: 高等教育出版社, 2008.
- [41] 高西全, 丁玉美. 数字信号处理（第二版）学习指导. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2001.
- [42] 李辉, 恩德, 高娜. 数字信号处理及 MATLAB 实现. 北京: 机械工业出版社, 2011.